

# **Разработка алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети**

**А.В. Боженюк, Е.М. Герасименко**

## **Введение**

Задачи, рассматриваемые на транспортных сетях, в частности, потоковые задачи являются актуальными, поскольку позволяют решать широкий круг практических задач, а именно, задач нахождения максимального количества потока, которое можно передать по дугам сети, нахождения минимального по стоимости маршрута перевозки заданного количества единиц товара и пр. Потоковые задачи нахождения максимального потока и потока минимальной стоимости в транспортных сетях широко освещались в литературе авторами [1, 2, 3]. Но в условиях реальной жизни в данных задачах необходимо учитывать, что такие параметры транспортных сетей, как пропускные способности и стоимости перевозок не могут быть точно известны. На данные параметры влияют различные экзогенные и эндогенные виды неопределенности [4], в частности, пробки на дорогах, ремонтные работы, колебания в ценах на бензин, следовательно, мы приходим к потоковым задачам в транспортных сетях в нечетких условиях [5]. Данная область является менее исследованной, подобные задачи были рассмотрены в [6].

Потоковые задачи, описанные ранее, можно отнести к статическим, так как при их рассмотрении не учитывается параметр времени прохождения потока по дугам сети. В действительности, поток затрачивает определенное время, чтобы добраться от начальной вершины дуги к конечной. Следовательно, мы приходим к «стационарно-динамическим» задачам. Данные модели предполагают не мгновенное прохождение потока по дугам сети. Данные задачи рассматривались в литературе авторами [1, 7].

Рассматриваемые в литературе задачи на динамических сетях, которые мы будем называть «стационарно-динамическими» задачами учитывают не мгновенное прохождение потока по дугам сети и не принимают во внимание возможность параметров транспортных сетей меняться во времени. Действительно, пропускные способности, стоимости перевозок и параметры времени прохождения потока по дугам сети могут изменяться в зависимости от времени отправления потока. Будем называть такие задачи «динамическими». Данная область исследования является малоизученной. Учитывая это, а также нечеткий характер параметров, присущий транспортным сетям, приходим к рассмотрению потоковых задач в динамических транспортных сетях в нечетких условиях [8]. В частности, рассмотрим в данной статье задачу определения потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети.

### **Задача нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети**

Рассмотрим постановку задачу нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети:

$$\text{Minimize } \sum_{\theta=0}^p \sum_{(x_i, x_j) \in \tilde{A}} \tilde{c}_{ij} \times \tilde{\xi}_{ij}(\theta), \quad (1)$$

$$\sum_{\theta=0}^p \sum_{x_j \in X} [\tilde{\xi}_{sj}(\theta) - \tilde{\xi}_{js}(\theta - \tau_{js}(\theta))] - \tilde{v}(p) = \tilde{0}, \quad (2)$$

$$\sum_{x_j \in X} [\tilde{\xi}_{ij}(\theta) - \tilde{\xi}_{ji}(\theta - \tau_{ji}(\theta))] = \tilde{0}, \quad x_i \neq s, t; \theta \in T, \quad (3)$$

$$\sum_{\theta=0}^p \sum_{x_j \in X} [\tilde{\xi}_{ij}(\theta) - \tilde{\xi}_{ji}(\theta - \tau_{ji}(\theta))] + \tilde{v}(p) = \tilde{0}, \quad (4)$$

$$0 \leq \tilde{\xi}_{ij}(\theta) \leq \tilde{u}_{ij}(\theta), \quad \forall (x_i, x_j) \in \tilde{A}, \theta \in T. \quad (5)$$

Выражение (1) означает, что необходимо найти минимальный маршрут перевозки максимального количества потока в транспортной сети за заданное количество моментов времени. Выражение (2) показывает, что максимальное количество потока  $\tilde{v}$  за  $p$  периодов времени, равно потоку, выходящему из

источника за  $p$  периодов времени  $\sum_{\theta=0}^p \tilde{\xi}_{sj}(\theta)$ . Выражение (4) показывает, что максимальное количество потока  $\tilde{\rho}$  за  $p$  периодов времени равно потоку, входящему в сток за  $p$  периодов времени  $\sum_{\theta=0}^p \tilde{\xi}_{jt}(\theta - \tau_{jt})$ . Количество потока  $\sum_{\theta=0}^p \tilde{\xi}_{js}(\theta - \tau_{js})$ , входящее в источник за  $p$  периодов времени, равно количеству потока, покидающему сток  $\sum_{\theta=0}^p \tilde{\xi}_{ij}(\theta)$  за  $p$  периодов времени и равно  $\tilde{\rho}$ . В (3) утверждается, что для каждого узла  $x_i$ , кроме источника и стока, и каждого момента времени  $\theta$  количество потока  $\tilde{\xi}_{ji}(\theta - \tau_{ji})$ , вошедшее в  $x_i$  в момент времени  $(\theta - \tau_{ji})$  равно числу единиц потока  $\tilde{\xi}_{ij}(\theta)$ , выходящему из  $x_i$  в момент  $\theta$ . Неравенство (5) показывает, что потоки  $\tilde{\xi}_{ij}(\theta)$  для всех моментов времени должны быть меньше пропускных способностей  $\tilde{u}_{ij}(\theta)$  по соответствующим дугам.

Иными словами, необходимо перевезти  $\tilde{v}(p)$  единиц потока с минимальными затратами в динамической транспортной сети, так, чтобы последняя единица потока вошла в сток в момент времени не позднее  $p$ .

Формальный алгоритм решения данной задачи:

**Этап 1.** Перейти от заданного нечеткого динамического графа  $\tilde{G} = (X, \tilde{A})$  к «растянутому во времени» на  $p$  интервалов нечеткому статическому графу  $\tilde{G}_p = (X_p, \tilde{A}_p)$  путем «растягивания во времени» исходного динамического графа за заданное количество временных интервалов путем создания отдельной копии каждой вершины  $x_i \in X$  в каждый рассматриваемый момент времени  $\theta \in T$ . Пусть  $\tilde{G}_p = (X_p, \tilde{A}_p)$  представляет собой «растянутый во времени» граф исходного динамического графа. Множество вершин  $X_p$  графа  $\tilde{G}_p$  задается как  $X_p = \{(x_i, \theta) : (x_i, \theta) \in X \times T\}$ . Множество дуг  $\tilde{A}_p$  состоит из дуг, идущих из каждой пары «вершина-время»  $(x_i, \theta) \in X_p$  в каждую пару «вершина время» вида  $(x_j, \theta + \tau_{ij}(\theta))$ , где  $x_j \in \Gamma(x_i)$  и

$\theta + \tau_{ij}(\theta) \leq p$ . Пропускные способности  $\tilde{u}(x_i, x_j, \theta, \theta + \tau_{ij}(\theta))$ , соединяющие пары «вершина-время»  $(x_i, \theta)$  с  $(x_j, \theta + \tau_{ij}(\theta))$  равны  $\tilde{u}_{ij}(\theta)$ , стоимость перевозки  $\tilde{c}(x_i, x_j, \theta, \theta + \tau_{ij}(\theta))$  единицы потока по дуге, соединяющей пару «вершина-время»  $(x_i, \theta)$  с  $(x_j, \theta + \tau_{ij}(\theta))$ , равна  $\tilde{c}_{ij}(\theta)$ . Вводим искусственный источник  $s'$  и сток  $t'$  и соединяем  $s'$  дугами с каждым истинным источником, а  $t'$  с каждым истинным стоком. Фиктивные дуги, идущие от искусственных вершин, имеют бесконечную пропускную способность и нулевую стоимость. Ищем максимальный поток от  $s'$  к  $t'$ .

**Этап 2.** Строим нечеткую остаточную сеть  $\tilde{G}_p^\mu$  для «растянутого во времени графа»  $\tilde{G}_p$  в зависимости от величин, идущих по дугам графа потоков. Нечеткая остаточная сеть  $\tilde{G}_p^\mu = (X_p^\mu, \tilde{A}_p^\mu)$  строится по «растянутой во времени» сети  $\tilde{G}_p$  в зависимости от величин потоков  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta = \vartheta + \tau_{ij}(\vartheta))$ , (далее  $\theta = \vartheta + \tau_{ij}(\vartheta)$ ), идущих по дугам последней следующим образом: каждая дуга в остаточной нечеткой сети  $\tilde{G}_p^\mu$ , соединяющая пару «вершина-время»  $(x_i^\mu, \vartheta)$  с парой «вершина-время»  $(x_j^\mu, \theta)$ , по которой поток  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$  отправляется в момент времени  $\vartheta \in T$  имеет нечеткую остаточную пропускную способность  $\tilde{u}^\mu(x_i, x_j, \vartheta, \theta) = \tilde{u}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) - \tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$ , стоимость  $\tilde{c}^\mu(x_i, x_j, \vartheta, \theta) = \tilde{c}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$  с временем прохождения  $\tau^\mu(x_i, x_j, \vartheta, \theta) = \tau(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$  и обратную дугу, соединяющую  $(x_j^\mu, \theta)$  с  $(x_i^\mu, \vartheta)$  с остаточной пропускной способностью  $\tilde{u}^\mu(x_j, x_i, \theta, \vartheta) = \tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$ , стоимостью  $\tilde{c}^\mu(x_j, x_i, \theta, \vartheta) = -\tilde{c}(x_j, x_i, \vartheta, \theta)$  и временем прохождения потока по данной дуге  $\tau^\mu(x_j, x_i, \theta, \vartheta) = -\tau(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$ .

**Этап 3.** Ищем путь  $\tilde{P}_p^\mu$  минимальной стоимости по алгоритму Форда из искусственного источника  $s'$  в искусственный сток  $t'$  в построенной нечеткой остаточной сети, начиная с нулевых значений потоков.

**(I)** Если путь  $\tilde{P}_p^\mu$  найден, переходим к **этапу 4**.

(II) Если пути не удалось найти, то получен максимальный поток  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}^\mu \times \tilde{P}_p^\mu = \tilde{v}(p)$  минимальной стоимости  $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}_p^\mu \times P_p^\mu)$  в растянутом во времени статическом нечетком графе из  $s'$  в  $t'$ , и переходим к шагу 5.

**Этап 4.** Пускаем по найденному пути максимальное количество единиц потока в зависимости от ребра в остаточной сети с минимальной остаточной пропускной способностью  $\tilde{\delta}_p^\mu = \min [\tilde{u}^\mu(x_i, x_j, \vartheta, \theta)]$ ,  $(x_i, x_j) \in \tilde{P}_p^\mu$ .

**Этап 5.** Обновляем значения потоков в графе  $\tilde{G}_p$ : для дуг, соединяющих пару «вершина-время»  $(x_i^\mu, \theta)$  с  $(x_j^\mu, \vartheta)$  в  $\tilde{G}_p^\mu$  с неположительной модифицированной стоимостью  $\tilde{c}^\mu(x_i, x_j, \theta, \vartheta) \leq 0$  изменяем поток  $\tilde{\xi}(x_j, x_i, \vartheta, \theta)$  по соответствующим дугам, идущим из  $(x_j, \vartheta)$  в  $(x_i, \theta)$  из  $\tilde{G}_p$  с  $\tilde{\xi}(x_j, x_i, \vartheta, \theta)$  на  $\tilde{\xi}(x_j, x_i, \vartheta, \theta) - \tilde{\delta}_p^\mu$ . Для дуг, соединяющих пару «вершина-время»  $(x_i, \vartheta)$  с  $(x_j, \theta)$  в  $\tilde{G}_p^\mu$  с неотрицательной модифицированной стоимостью  $\tilde{c}^\mu(x_i, x_j, \vartheta, \theta) \geq 0$  изменяем поток  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$  по дугам, идущим из  $(x_i, \vartheta)$  в  $(x_j, \theta)$  из  $\tilde{G}_p$  с  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta)$  на  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}_p^\mu$  и переходим к **этапу 2**, начиная с нового значения потока по дугам и заменяя значение потока в графе  $\tilde{G}_p$ :  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) \rightarrow \tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}^\mu \times \tilde{P}_p^\mu$ .

**Этап 6.** Если найден максимальный поток  $\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}^\mu \times \tilde{P}_p^\mu = \tilde{v}(p)$  минимальной стоимости  $\tilde{c}(\tilde{\xi}(x_i, x_j, \vartheta, \theta) + \tilde{\delta}_p^\mu \times P_p^\mu)$  в графе  $\tilde{G}_p$  из фиктивного источника  $s'$  в фиктивный сток  $t'$ , определяемый множеством путей  $\tilde{P}_p^\mu$ , переходим к первоначальному динамическому графу  $\tilde{G}$  следующим образом: отбрасываем искусственные вершины  $s'$ ,  $t'$  и дуги, соединяющие их с другими вершинами. Таким образом, в исходном динамическом графе  $\tilde{G}$  получен максимальный поток  $\tilde{v}(p)$  минимальной стоимости, эквивалентный потоку из источников (начальная вершина исходного графа, растянутая на  $p$  интервалов) в стоки (конечная вершина, растянутая на  $p$  интервалов) в графе  $\tilde{G}_p$  после удаления фиктивных вершин, а каждый путь, соединяющий

вершины  $(s, \vartheta)$  и  $(t, \zeta = \vartheta + \tau_{st}(\vartheta))$ ,  $\zeta \in T$ , по которому идет поток  $\tilde{\xi}(s, t, \vartheta, \zeta)$  стоимости  $\tilde{c}(\tilde{\xi}(s, t, \vartheta, \zeta))$  соответствует потоку  $\tilde{\xi}_{st}(\vartheta)$  . стоимости  $\tilde{c}(\tilde{\xi}_{st}(\vartheta))$  .

### Численный пример, реализующий работу алгоритма

Рассмотрим пример, иллюстрирующий реализацию описанного алгоритма. Пусть транспортная сеть, являющаяся частью железнодорожной карты, представлена в форме нечеткой транспортной сети, полученной из ГИС «Object Land» [9], как показано на рис.1. Понятие «ГИС» представлено в [10].

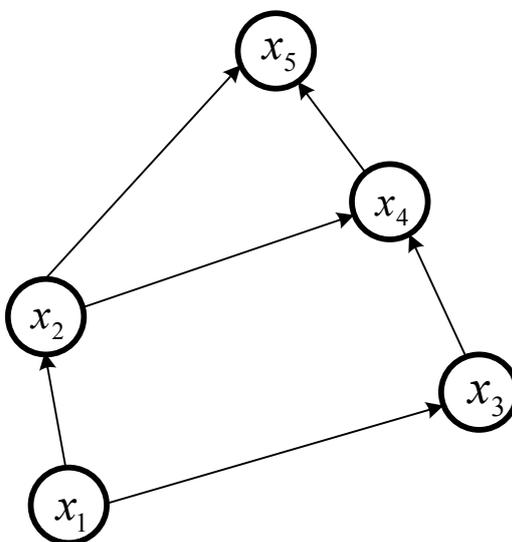


Рис. 1. – Исходный динамический граф  $\tilde{G}$

Вершина  $x_1$  представляет собой источник, вершина  $x_5$  – сток. Нечеткие пропускные способности и стоимости, а также параметры времени прохождения потока по дугам, зависящие от момента отправления потока представлены в виде таблиц № 1, 2 и 3. Необходимо найти минимальную стоимость перевозки максимального количества единиц потока  $\tilde{v}(p)$ . Правила оперирования с нечеткими треугольными числами представлены в [6].

Строим остаточную сеть, как показано на рис.2. Так как остаточная сеть на первом шаге совпадает с исходным «растянутым во времени» графом, находим в ней путь минимальной стоимости от  $s'$  к  $t'$  по алгоритму Форда в  $\tilde{G}_p^*$ . Получаем путь  $s', (x_1, 1), (x_2, 2), (x_5, 3), t'$  стоимости  $(105, 15, 15)$  условных

единиц и передаем по нему (20,3,4) общей стоимости (2100,15,15) единиц потока, что показано на рис.3.

Таблица № 1

Нечеткие пропускные способности, зависящие от момента отправления потока

Момент времени $\theta$	Нечеткие пропускные способности по дугам графа $\tilde{y}_{ij}$ , ед.					
	$(x_1, x_2)$	$(x_1, x_3)$	$(x_2, x_4)$	$(x_2, x_5)$	$(x_3, x_4)$	$(x_4, x_5)$
0	(10,1.5, 2)	(18, 3, 3)	(25, 4, 5)	(30, 5, 6)	(25, 4, 5)	(30, 5, 6)
1	(20, 3, 4)	(15, 3, 2)	(20, 3, 4)	(25, 4, 5)	(25, 4, 5)	(25, 4, 5)
2	(8, 1, 1)	(18, 3, 3)	(25, 4, 5)	(25, 4, 5)	(20, 3, 4)	(30, 5, 6)
3	(10,1.5, 2)	(18, 3, 3)	(18, 3, 3)	(30, 5, 6)	(20, 3, 4)	(25, 4, 5)

Таблица № 2

Нечеткие стоимости, зависящие от момента отправления потока

Момент времени $\theta$	Нечеткие стоимости по дугам граф $\tilde{c}_{ij}$ , условные ед.					
	$(x_1, x_2)$	$(x_1, x_3)$	$(x_2, x_4)$	$(x_2, x_5)$	$(x_3, x_4)$	$(x_4, x_5)$
0	(40,8,8)	(50,9,8)	(60,10,9)	(70,10,10)	(50,9,8)	(80,15,15)
1	(30,7,6)	(30,7,6)	(40,8,8)	(55,9,9)	(35,7,7)	(25,5,5)
2	(60,10,9)	(40,8,8)	(50,9,8)	(75,11,12)	(50,9,8)	(30,7,6)
3	(30,7,6)	(70,10,10)	(60,10,9)	(60,10,9)	(50,9,8)	(60,10,9)

Переходим к построению «растянутого во времени графа»  $\tilde{G}_p$ , как на рис.2. Строим остаточную сеть исходя из нового значения потока по дугам графа, как показано на рис.4. Находим путь минимальной стоимости в построенной остаточной сети от  $s'$  к  $t'$  по алгоритму Форда. Получаем путь  $s', (x_1, 0), (x_2, 1), (x_4, 2), (x_5, 3), t'$  стоимости (110,15,15) условных единиц и передаем

по нему (10,1.5,2) единиц потока общей стоимости (1100,15,15), тогда поток переходит в (рис.5).

Таблица № 3

Параметры времени прохождения потока по дугам

Момент времени $\theta$	Время прохождения потока по дугам графа $\tau_{ij}$ , ед. времени					
	$(x_1, x_2)$	$(x_1, x_3)$	$(x_2, x_4)$	$(x_2, x_5)$	$(x_3, x_4)$	$(x_4, x_5)$
0	1	4	4	2	5	1
1	1	3	1	4	4	4
2	3	1	3	1	3	1
3	2	1	3	2	3	1

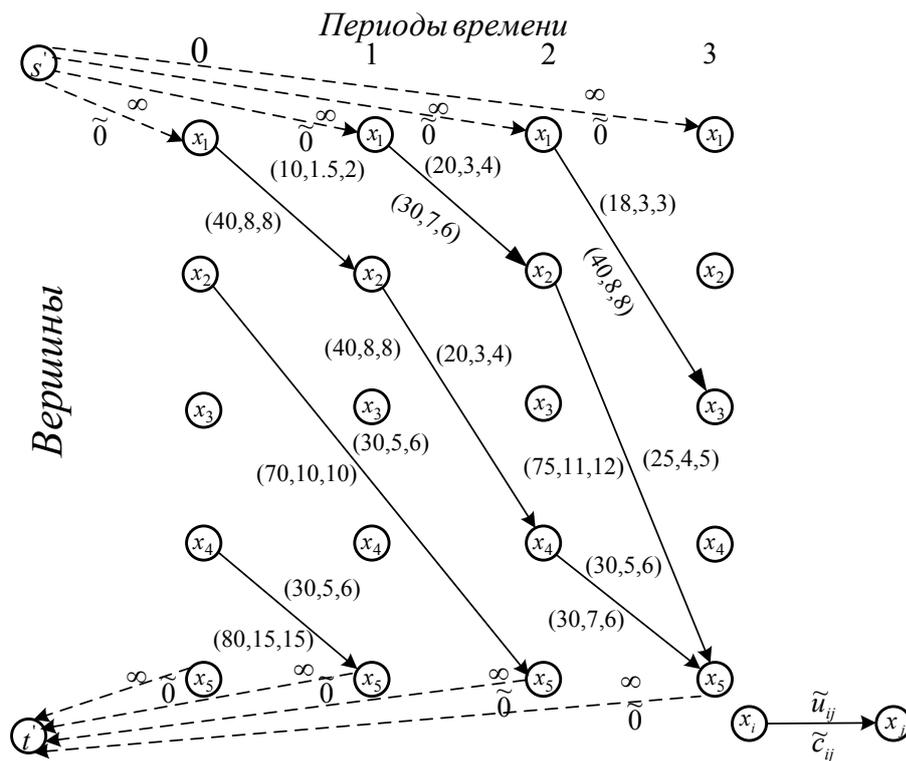


Рис. 2. –  $\tilde{G}_p$  – «растянутый во времени» вариант графа  $\tilde{G}$

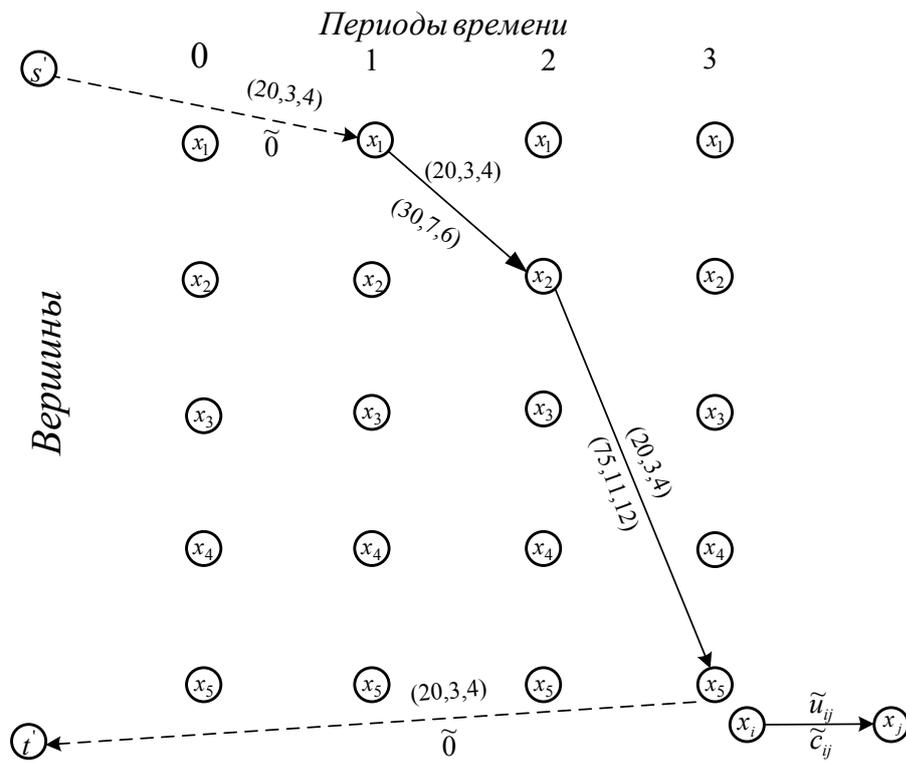


Рис. 3. – Граф  $\tilde{G}_p$  с потоком  $(20,3,4)$  единиц

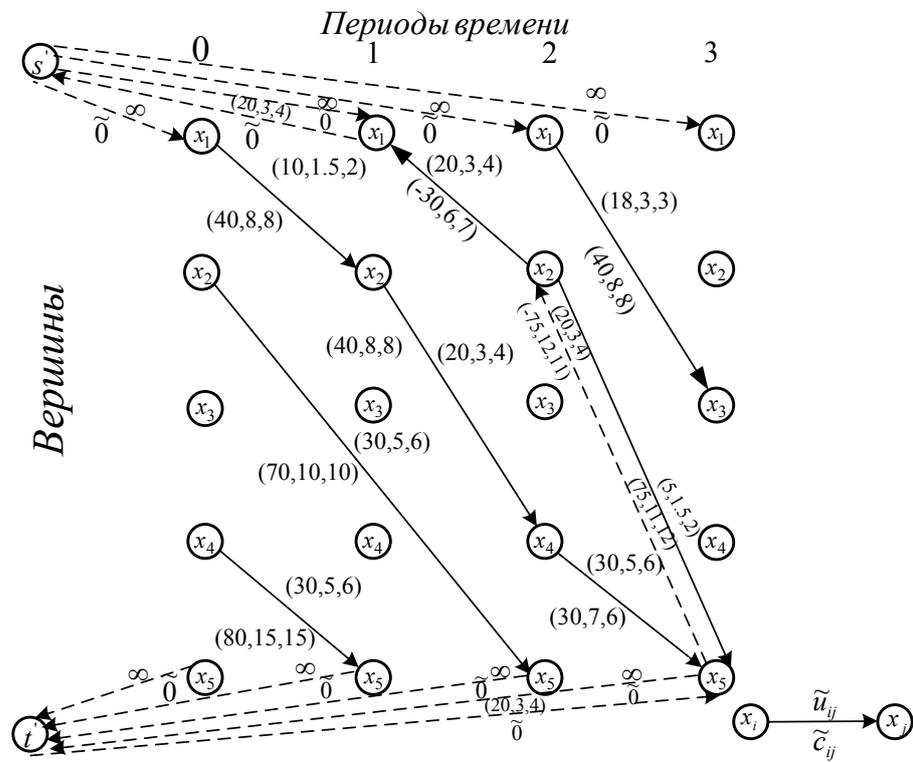


Рис. 4. – Остаточная сеть  $\tilde{G}_p^\mu$  после нахождения потока

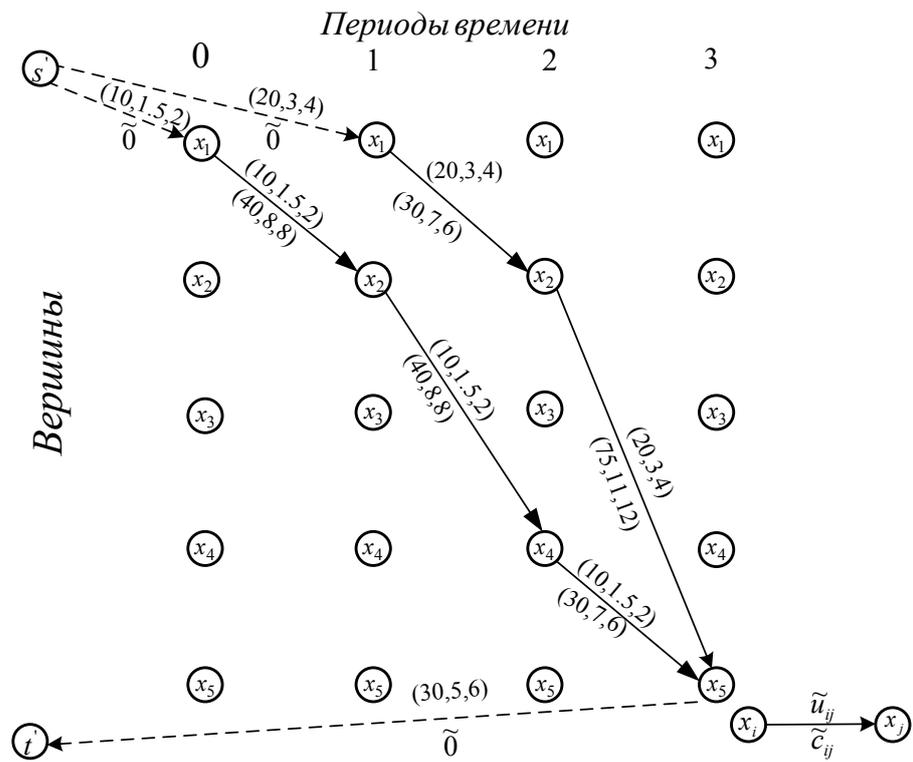


Рис. 5. – Граф  $\tilde{G}_p$  с новым значением потока

Строим остаточную сеть исходя из нового значения потока по дугам графа, как показано на рис.6. Так как в данной сети не существует увеличивающего пути, найден максимальный поток минимальной стоимости.

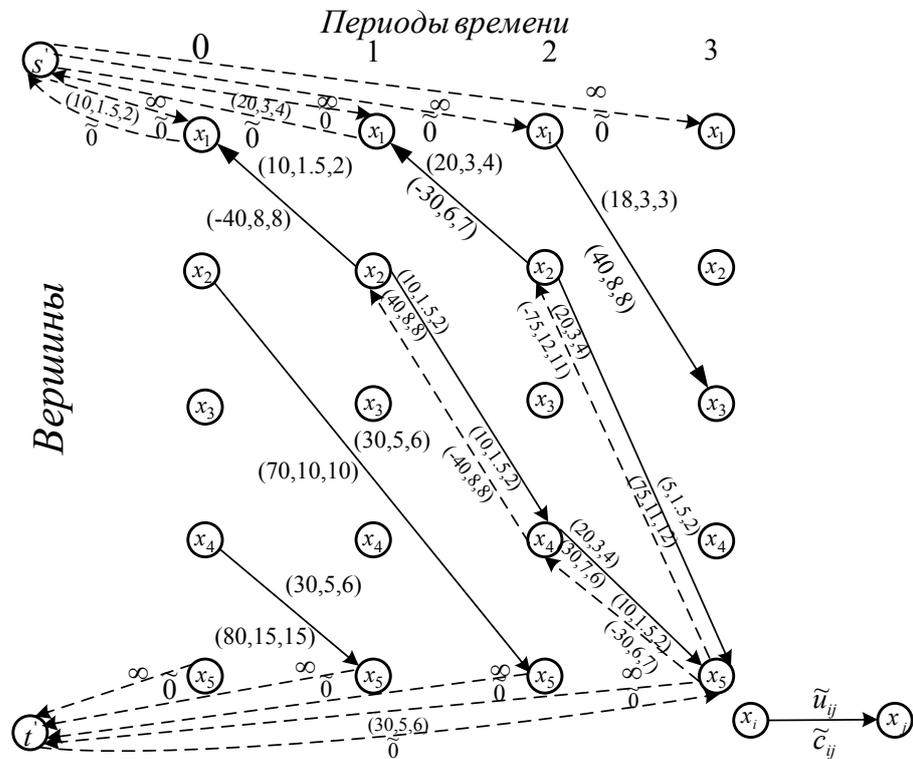


Рис. 6. – Остаточная сеть  $\tilde{G}_p^\mu$  после нахождения потока

Отбрасывая искусственные вершины и дуги с потоком, соединяющие их с другими вершинами, получаем максимальный поток (30,5,6) единиц минимальной стоимости (3200,15,15) условных единиц. Переходя к динамическому графу  $\tilde{G}$  от «растянутого во времени» статического графа  $\tilde{G}_p$ , можно сделать вывод, что максимальный поток (30,5,6) за 3 интервала времени равен потоку, выходящему из пар «вершина-время»  $(x_1,0)$  и  $(x_1,1)$  и входящему в пару «вершина-время»  $(x_5,3)$ , т.е. (30,5,6) единиц, которые определяются путем  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5$ , который отправляется в момент времени  $\theta=1$  и прибывает в сток в момент времени  $\theta=3$  и путем  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$ , который отправляется в момент времени  $\theta=0$  и прибывает в сток в момент времени  $\theta=3$ .

### **Заключение**

Данная статья рассматривает алгоритм нахождения максимального потока минимальной стоимости в нечеткой динамической транспортной сети. Практическая ценность рассматриваемого метода в том, что он позволяет решать задачи нахождения оптимального маршрута перевозки максимального количества потока от начального пункта к конечному. Актуальность рассматриваемого алгоритма в том, что он принимает во внимание нечеткий характер параметров транспортной сети, а также зависимость параметров транспортной сети от времени отправления потока.

### **Литература:**

1. Форд, Л.Р. Потоки в сетях [Текст] / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон. – М: Мир, 1966. – 276 с.
2. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Текст] / Н. Кристофидес. – М: Мир, 1978. – 432 с.
3. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах [Текст] / Э. Майника – М: Мир, 1981. – 326 с.

4. Целигоров, Н.А., Целигорова, Е.Н., Мафура, Г.В. Математические модели неопределенностей систем управления и методы, используемые для их исследования [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, №4. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

5. Bozhenyuk, A., Gerasimenko, E., Rozenberg, I. The task of minimum cost flow finding in transportation networks in fuzzy conditions [Text] // Proceedings of the 10th International FLINS Conference on Uncertainty Modeling in Knowledge Engineering and Decision Making Word Scientific, Istanbul, Turkey, 26-29 August 2012. – pp. 354-359

6. Bozhenyuk, A., Gerasimenko, E., Rozenberg, I. The methods of maximum Flow and minimum cost flow finding in fuzzy network [Text] // Proceedings of the Concept Discovery in Unstructured Data Workshop (CDUD 2012) co-located with the 10th International Conference on Formal Concept Analysis (ICFCA 2012) May 2012, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium 2012. – pp. 1-12.

7. Боженюк, А.В. Анализ и исследование потоков и живучести в транспортных сетях при нечетких данных [Текст] // А.В. Боженюк, И.Н. Розенберг, Т.А. Старостина – М: Научный мир, 2006. – 136 с.

8. Bozhenyuk, A., Gerasimenko, E., Rozenberg, I. Algorithm of maximum dynamic flow finding in a fuzzy transportation network [Text] // Proceedings of East West Fuzzy Colloquium 2012 19th Zittau Fuzzy Colloquium, September 5 – 7, pp. 125-132.

9. Rozenberg, I., Gittis, C., Svyatov, D. Geoinformation system Object Land [Text] // Proceedings of IPI RAN Systems and Means of Informatics. – Science, Moscow, 2000.

10. Клаус, Н.Г., Клаус, А.И. Практика интеграции геоинформационных систем и многоагентных моделей в исследовании социальных конфликтов [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2011, №1. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n1y2011/400> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.