

## Определение предела текучести материала по результатам статического вдавливания инденторов

*А.С. Кравчук, А.И. Кравчук*

*Белорусский государственный университет, Минск*

**Аннотация:** Впервые с помощью простейшей модели упруго-идеально-пластического покрытия установлена связь между твердостью по Мейеру и абсолютной величиной предела текучести материала при сжатии для всех типов инденторов, используемых для проведения испытаний на твердость методом статического вдавливания. При использовании в качестве уравнения состояния билинейной диаграммы Прандтля, соответствующей упруго-идеально-пластическому материалу, необходимость в точном определении толщины слоя в простейшей модели покрытия отпадает. Если линейный размер пластического отпечатка совпадает на 90 процентов с линейным размером полной области контакта с учетом упругих деформаций, то твердость по Мейеру и является абсолютным значением предела текучести при сжатии для исследуемого материала.

**Ключевые слова:** Твердость, твердость по Мейеру, предел текучести, статическое вдавливание инденторов

### Введение

По широте применения испытания на твердость, особенно при комнатной температуре, успешно конкурируют с испытаниями на статическое растяжение. Это объясняется простотой, высокой производительностью, отсутствием разрушения образца, возможностью оценки свойств отдельных структурных составляющих и тонких слоев на малой площади [1].

При определении твердости всеми методами (кроме микротвердости) измеряют интегральное значение твердости материала (усредненное для всех структурных составляющих). Поэтому получающийся после снятия нагрузки отпечаток должен быть по размеру значительно больше размеров зерен и других структурных составляющих тестируемого материала [1, 2].

В связи с широчайшим распространением испытаний на твердость [3-5] значительный интерес представляет установление связи между размерными числами твердости и механическими характеристиками материала, получаемых на образцах при их растяжении/сжатии.

Первой значительной теоретической работой в этом направлении было исследование Ишлинского Ю.А. [6], посвященное моделированию измерения твердости в рамках жесткого идеально-пластического тела. Полученная им константа пересчета твердости по Бринеллю в предел текучести при растяжении более чем на 50 лет определила направление исследований в этой области не только у нас, но и за рубежом. Достаточно вспомнить работу Шилда Р.Т. [7], изданную им более чем на 10 лет позже, работы Ишлинского Ю.А. и являющуюся практически переводом на английский язык работы Ишлинского Ю.А., дополненную Шилдом Р.Т. рассмотрением скоростей деформаций.

К сожалению, предложенное Ишлинским Ю.И. значение теоретической константы позже не подтвердилось, и это породило некоторую неуверенность у инженеров технологов в возможности теоретического прогнозирования пересчетов размерных чисел твердости в предел текучести. [2].

Однако, на самом деле возможность теоретически обоснованного перевода значений твердости в значение предела текучести существует и этому посвящена данная статья.

В инженерии известно правило: «Чем проще система, тем надежнее ее работа». В этом смысле очевидно, что наиболее простым подходом в определении связи твердости и предела текучести материала при сжатии может служить простейшая модель деформируемого покрытия типа основания Винклера, но учитывающая возможность пластических деформаций стержней [8,9].

Как известно, самым слабым местом данной модели является невозможность определения глубины слоя. Но, как показали исследования, изложенные в данной статье, при использовании в качестве уравнения состояния билинейной диаграммы Прандтля, соответствующей упруго-

---

идеально-пластическому материалу, необходимость в точном определении толщины слоя модели полностью отпадает.

Необходимо отдельно обратить внимание на то, что в настоящее время практически для всех материалов используется гипотеза о равенстве пределов текучести при растяжении и при сжатии. Неточность этой гипотезы и будет определять возможную экспериментальную неточность связи твердости с пределом текучести при растяжении, но если отбросить гипотезу о симметрии диаграммы растяжения/сжатия, то в данной статье теоретически установлена и полностью обоснована только связь твердости и предела текучести при сжатии.

### **Основные гипотезы, используемые в простейшей модели деформируемого покрытия**

Предполагается, что поверхность покрытия плоская. Это значит, что отклонения поверхности малы в сравнении с глубиной внедрения индентора. Деформируемое покрытие покрывает гладкое жесткое полупространство [8, 9].

Предполагается, что покрытие может быть заменено призматическими стержнями с постоянным квадратным сечением  $\Delta \times \Delta$  в плоскости  $XOY$  и толщиной  $h$  (рис. 1). Стержни могут перемещаться только в  $Z$ -направлении, при этом их напряженно-деформированное состояние призматического элемента является однородным. Размер  $\Delta$  пренебрежимо мал в сравнении с наименьшим характерным размером область контакта в плоскости  $XOY$  (рис. 1) [8,9].

### **Краевое условие по перемещениям**

В рамках задач механики контактного взаимодействия внедряемое в покрытие тело является недеформируемым, т.е. жестким штампом. Пусть открытое множество  $S \subset XOY$  является внутренностью области контакта,

---

т.е.  $S = \{(x, y) | \sigma_z(x, y, z) \neq 0\}$ , где  $\sigma_z(x, y, z)$  – напряжения, действующие в области контакта. Тогда замыкание  $\bar{S}$  является областью контакта.

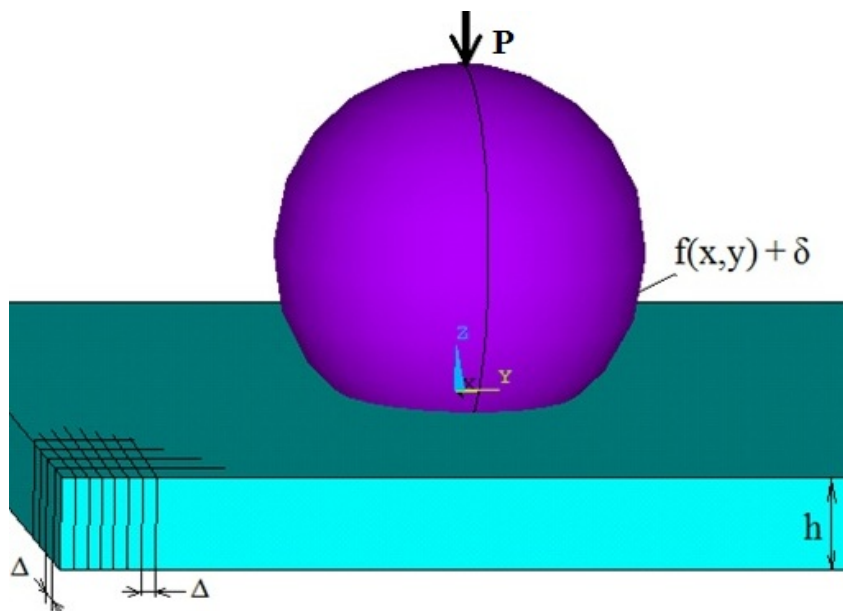


Рис. 1. – Схема для определения высоты падения центра тяжести

Учитывая, что в рамках простейшей модели деформируемого покрытия контактные напряжения  $\sigma_z(x, y, z) \neq 0$  могут возникнуть только в точке, в которой перемещение в области контакта  $w(x, y, z) \neq 0$ , то внутренность области контакта гораздо проще определить как  $S = \{(x, y) | w(x, y, z) \neq 0\}$ .

Пусть уравнение поверхности внедряемого недеформируемого штампа описывается уравнением  $f(x, y)$ , и точка  $(0, 0, 0)$  является точкой первичного касания штампа и плоскости  $XOY$ . Тогда краевое условие по перемещениям определяется следующим уравнением:

$$w(x, y, 0) = \begin{cases} f(x, y) + \delta, & (x, y) \in \bar{S}, \\ 0, & (x, y) \notin \bar{S}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\delta$  - глубина максимального внедрения штампа. Она определяется из геометрических соображений, т.е. на границе области контакта  $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$  контактные перемещения равны нулю ( $w(x, y, 0)|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S} = 0$ ).

Принимая во внимание верхнее уравнение (11), получаем, что для любой достоверно определенной точки на границе области контакта  $(x, y) \in \bar{S} \setminus S$  выполнено равенство:

$$\delta = -f(x, y)|_{(x, y) \in \bar{S} \setminus S}. \quad (2)$$

Вертикальные деформации элементов, составляющих покрытие в области контакта, очевидно, можно описать уравнением:

$$\varepsilon(x, y, 0) = \frac{w(x, y, 0)}{h}. \quad (3)$$

### Уравнение состояния материала стержней

Обычно рассматриваются экспериментальные кривые для растяжения образца. При этом предполагается, что диаграмма растяжения и диаграмма сжатия центрально симметричны относительно начала координат (рис. 2).

Одним из наиболее простых уравнений состояния является упруго-идеально пластическое поведение материала при сжатии, описываемое билинейной диаграммой Прандтля [8]:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E \cdot \varepsilon, & \frac{-\sigma_T}{E} < \varepsilon \leq 0, \\ -\sigma_T, & \varepsilon \leq \frac{-\sigma_T}{E}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $E$ ,  $\sigma_T$  - характерные для материала константы, определяемые исходя из одноосного растяжения образца материала.

### Уравнения равновесия штампа на границе покрытия

Как известно, выполняя интегрирование контактных напряжений  $\sigma_z(x, y, 0)$  по области  $\bar{S}$ , можно определить величину силы  $P$ , необходимую для получения заданной области контакта по формуле:

$$P = - \iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y, 0) dx dy \quad (5)$$

Кроме этого, можно определить еще два опрокидывающих штамп главных момента  $M_x$  и  $M_y$ , действующих в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$  и уравнивающих несимметрично вдавливаемый штамп:

$$M_x = - \iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y, 0) \cdot x dx dy,$$

$$M_y = - \iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y, 0) \cdot y dx dy.$$

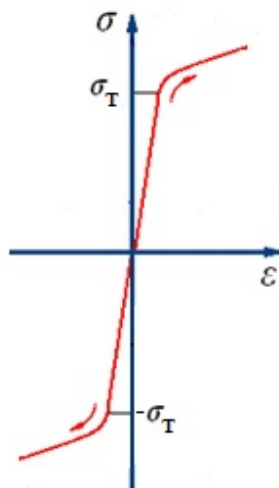


Рис. 2. – Гипотеза о симметрии нелинейной диаграммы растяжения/сжатия

Однако, в статье предполагается, что все рассматриваемые задачи имеют геометрическую и физическую симметрию и, соответственно, главные моменты равны нулю  $M_x = M_y = 0$ .

Отметим, что в случае решения осесимметричных задач (т.е. когда распределение напряжений не зависит от  $\theta$ ), то вычисления величины приложенной к штампу силы можно определить по формуле [10]:

$$\begin{aligned} P &= - \iint_{\bar{S}} \sigma_z(x, y, 0) dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_z(x(r, \theta), y(r, \theta), 0) \cdot r dr d\theta = \\ &= -2\pi \int_0^a \tilde{\sigma}_z(r, 0) \cdot r dr \end{aligned} \quad (6)$$

### Внедрение шара

Проведем рассуждения в полярной системе координат для шара радиуса  $R$  с центром в точке с координатами  $(0, R)$ , касающегося покрытия в точке  $(0, 0)$  (рис. 3).

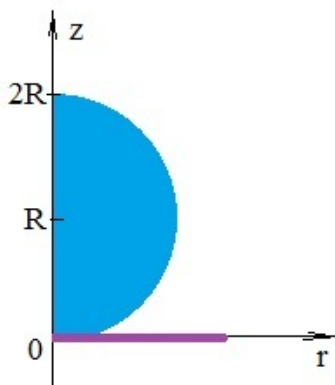


Рис. 3. – Схема внедрения шара в цилиндрической системе координат

Уравнение его поверхности можно записать в виде  $f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$  ( $r \in [0, a]$ ). В этом случае область контакта  $\bar{S}$  составляет круг радиуса  $a$ , для которого выполнено неравенство  $a < R$ . Тогда разлагая в ряд  $f(r)$  в на отрезке  $[0, a]$ , с высокой относительной точностью для всех радиусов контакта  $a < \sqrt[4]{0.08} \cdot R \approx 0.5318 \cdot R$  шаровидный индентор

геометрически можно заменить параболоидом вращения

$$f(r) = R \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{r^2}{2 \cdot R} \quad (r \in [0, a]).$$

Таким образом, все результаты, полученные для параболоида вращения, будут верны и для шара, в предположении выполнения неравенства  $a < 0.5318 \cdot R$ , где  $a$  - радиус круга контакта, а  $R$  - радиус шара.

### Внедрение параболоида вращения

В данном случае  $f(r) = \frac{r^2}{2 \cdot R}$  и область контакта  $\bar{S}$  составляет круг радиуса  $a$ . Исходя из (1), можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя:

$$w(r,0) = \begin{cases} \frac{r^2}{2 \cdot R} + \delta, & r \in [0, a), \\ 0, & r \notin [0, a), \end{cases} \quad (7)$$

где  $\delta$  - глубина максимального внедрения параболоида вращения (2):

$$\delta = -\frac{a^2}{2 \cdot R}. \quad (8)$$

Деформации в области контакта определяются выражением (3), (7):

$$\varepsilon_z(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h}. \quad (9)$$

Как уже отмечалось в предыдущем случае, деформации сжатия в области контакта монотонно возрастают при стремлении  $r$  к нулю, поэтому существует граница круга пластических деформаций  $a_T$  ( $a_T \in [0, a]$ ), такая, что выполнено равенство (рис. 4):

$$\varepsilon_z(a_T,0) = -\frac{\sigma_T}{E}. \quad (10)$$



Поскольку существует круг радиуса  $a_T$ , внутри которого напряжение постоянно и равно  $-\sigma_T$ , а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое, то, исходя из этого, а также формул (4), (9) и (10), можно получить распределение напряжений  $\sigma_z$  в области контакта (рис. 4):

$$\sigma_z = \begin{cases} E \frac{r^2 - a^2}{2 \cdot R \cdot h}, & a_T < r \leq a, \\ -\sigma_T, & 0 \leq r \leq a_T, \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что при  $r = a_T$ , исходя из (11), можно получить

$$\sigma_T = E \frac{a^2 - a_T^2}{2 \cdot R \cdot h}. \quad (12)$$

Используя (6), (11) и, в качестве замены в промежуточных вычислениях, (12) вычислим величину силы, приложенную к индентеру для получения эпюры, изображенной на рисунке 4:

$$\begin{aligned} P &= -2\pi \int_0^a \sigma_z(r,0) \cdot r dr = 2\pi \int_0^{a_T} \sigma_T \cdot r dr + \pi \frac{E}{R \cdot h} \int_{a_T}^a (a^2 - r^2) \cdot r dr = \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 + E \cdot \frac{a^2 - a_T^2}{2 \cdot R \cdot h} \cdot \pi \cdot \frac{(a^2 - a_T^2)}{2} = \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 + \sigma_T \cdot \pi \cdot \frac{(a^2 - a_T^2)}{2} = \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{a_T^2} - 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку  $a$  в (8) является радиусом контакта, с учетом упругих деформаций покрытия, то и  $|\delta|$  - это абсолютное значение полной глубины погружения индентора в покрытие ( $\delta < 0$ ). Подставляя (8) в (13) получаем:

$$P = \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot R \cdot |\delta|}{a_T^2} - 1 \right) \right). \quad (14)$$

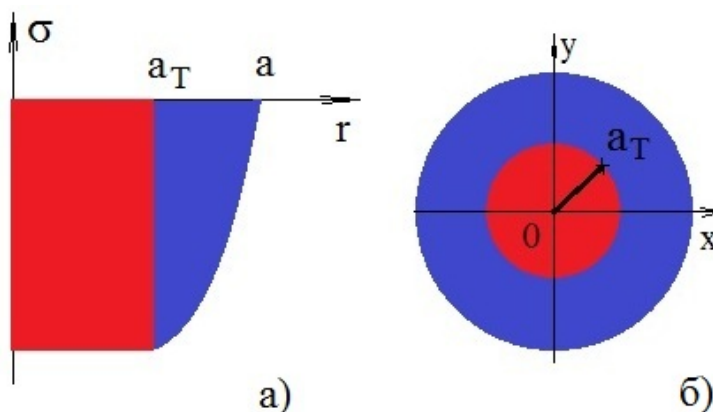


Рис. 4. – Распределение напряжений  $\sigma_z$  в области контакта параболоида вращения и покрытия (синий цвет – упругие напряжения, красный цвет - пластические напряжения): а) радиальное сечение распределения напряжений; б) вид с верху областей упругих и пластических напряжений

Далее, учитывая, что твердость по Мейеру  $HM$  определяется как  $P/(\pi \cdot a_T^2)$ , можно установить с помощью (14), что:

$$HM = \sigma_T \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2 \cdot R \cdot |\delta|}{a_T^2} - 1 \right) \right).$$

Если предел текучести продолжает существенно возрастать при увеличении глубины внедрения  $|\delta|$ , то исследователь имеет дело не с упруго-идеально-пластичным материалом, а с упрочняющимся.

Очевидно, что если выполнено неравенство  $a_T > 0.92 \cdot a = 0.92 \cdot \sqrt{2 \cdot R \cdot |\delta|}$ , обеспечивающее близость полного радиуса области контакта  $a$  и радиуса отпечатка  $a_T$ , то с достаточной точностью можно считать, что твердость по Мейеру  $HM$  является пределом текучести

при сжатии, но с учетом гипотезы о симметрии диаграммы это также является пределом текучести при растяжении  $\sigma_T$ .

### Пересчет твердости по Бринеллю в предел текучести

Очевидно, отношение шаровой поверхности отпечатка к проекции отпечатка на поверхности изделия устанавливает коэффициент перехода от значений твердости по Бринеллю  $HB$  к значению твердости по Мейеру  $HM$ :

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \left( R - \sqrt{R^2 - a_T^2} \right)}{\pi \cdot a_T^2} = 2 \cdot \left( \frac{R}{a_T} \right)^2 \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a_T}{R} \right)^2} \right).$$

Если рассматривать неравенство  $0.1 \cdot R < a_T < 0.5 \cdot R$ , то с относительно погрешностью в 5% твердость по Бринеллю и по Мейеру будут иметь близкие значения, т.к. будет выполнено:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \left( R - \sqrt{R^2 - a_T^2} \right)}{\pi \cdot a_T^2} \approx 1.$$

Установить же более общую связь твердости по Бринеллю и твердости по Мейеру (и предела текучести) через единственную константу для всех возможных отношений  $\frac{a_T}{R}$ , как это предлагал Ишлинский А.Ю. в одной из своих классических работ [6], просто не возможно, а предлагавшаяся им константа вообще неверна ни при каких отношениях  $\frac{a_T}{R}$ .

### Внедрение конуса

Пусть  $f(r) = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot r$ , где  $\operatorname{tg}(\alpha)$  - тангенс угла наклона образующей конуса к плоской поверхности покрытия (рис. 5). В этом случае область контакта  $\bar{S}$  составляет круг радиуса  $a$ . Исходя из (11), можно поставить следующее краевое условие по перемещениям на границе слоя [8]:

$$w(r,0) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha) \cdot r + \delta, & r \in [0, a), \\ 0, & r \notin [0, a), \end{cases} \quad (15)$$

где  $\delta$  - глубина максимального внедрения конуса:

$$\delta = -\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a. \quad (16)$$

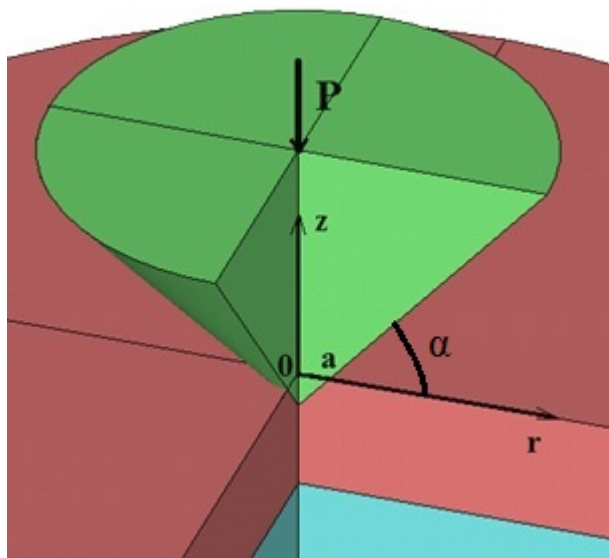


Рис. 5. – Контактная задача для конуса

Тогда деформация в области контакта (3) определяются следующим способом на интервале  $[0, a]$ :

$$\varepsilon_z(r,0) = \frac{w(r,0)}{h} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h}. \quad (17)$$

Как и ранее, будем предполагать, что существует такой радиус  $a_T$  ( $0 < a_T < a$ ):

$$\varepsilon_z(a_T,0) = -\frac{\sigma_T}{E}. \quad (18)$$

Поскольку существует круг радиус  $a_T$ , внутри которого напряжение постоянны и равны  $-\sigma_T$ , а снаружи этого круга уравнение состояния линейно упругое, то, исходя из этого описания деформаций и уравнений (4), (17) и (18), можно получить распределение напряжений в области контакта:

$$\sigma_z = \begin{cases} E \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (r - a)}{h}, & a_T < r \leq a, \\ -\sigma_T, & 0 \leq r \leq a_T. \end{cases} \quad (19)$$

Как и ранее при  $r = a_T$ , исходя из (19) можно получить

$$\sigma_T = E \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - a_T)}{h}. \quad (20)$$

Подставляя (19) в уравнение равновесия (6), с использованием промежуточной замены (2), получаем уравнение, связывающее радиус  $a$  области контакта с действующей нагрузкой  $P$ , при условии существования круга пластических деформаций с радиусом  $a_T$ :

$$\begin{aligned} P &= -2\pi \int_0^a \sigma_z(r, 0) \cdot r dr = 2\pi \int_0^{a_T} \sigma_T \cdot r dr + 2\pi \cdot \frac{E}{h} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \int_{a_T}^a (a - r) \cdot r dr = \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 + E \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - a_T)}{h} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot (a - a_T) \cdot (a + 2 \cdot a_T) = \quad (21) \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 + \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a}{a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{a}{a_T} + 2 \right) = \\ &= \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a}{a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{a}{a_T} + 2 \right) \right). \end{aligned}$$

Выполняя подстановку вместо  $a = |\delta|/\operatorname{tg}(\alpha)$ , можно получить:

$$P = \sigma_T \cdot \pi \cdot a_T^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} + 2 \right) \right).$$

Переходя к твердости по Мейеру, можно вывести, что для конического индентора:

$$HM = \sigma_T \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} + 2 \right) \right)$$

Как и в случае с внедрением шара, если выполнено неравенство  $a_T > 0.92 \cdot a = 0.92 \cdot |\delta| / \operatorname{tg}(\alpha)$ , то с достаточной точностью твердость по Мейеру является пределом текучести материала при сжатии и в случае конического индентора.

### Внедрение многогранных инденторов

Рассмотрим случай, когда индентором является правильная пирамида с  $m$  гранями, имеющая в качестве боковых  $m - 1$  равных треугольных граней (рис. 6, 7) [6].

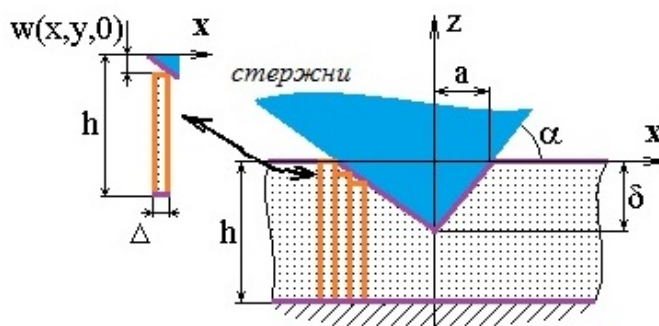


Рис. 6. – Сечение покрытия и внедренного в него правильного пирамидального индентора Берковича плоскостью  $XOZ$

Следует определить размер области контакта с помощью радиуса  $a$  вписанной в область контакта окружности (рис. 7) и формы поверхности пирамиды  $f(x, y)$  в области

$$\Omega = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq a, -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \leq y \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot x \right\}, \text{ где } \Omega \subset S, S -$$

правильная многоугольная область контакта (рис. 7).

Необходимо отметить, что поверхность  $f(x, y)$  идеальной правильной пирамиды с  $m - 1$  боковыми треугольными гранями, касающимися поверхности покрытия, определяется в области  $\Omega$  уравнением (рис. 6):

$$f(x, y)|_{\Omega} = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x \quad (0 \leq x \leq a), \quad (22)$$

где  $\alpha$  - угол между треугольными гранями пирамиды и поверхностью покрытия (рис. 6).

Поэтому максимальная глубина внедрения  $\delta$  определяется уравнением [7]:

$$\delta = -f(a,0)|_{\Omega} = -tg(\alpha) \cdot a. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что перемещения в подобласти  $\Omega$  области контакта  $S$  задаются уравнением:

$$w(x, y, 0)|_{\Omega} = f(x, y)|_{\Omega} + \delta = tg(\alpha) \cdot (x - a). \quad (24)$$

Исходя из (3) и (24), деформация в области  $\Omega$  определяется уравнением:

$$\varepsilon_z(x, y, 0)|_{\Omega} = \frac{tg(\alpha) \cdot (x - a)}{h}. \quad (25)$$

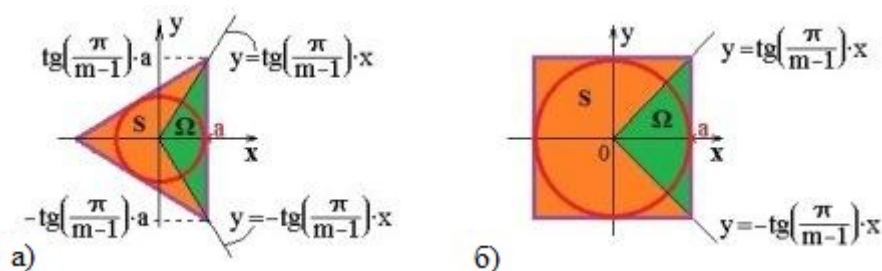


Рис. 7. – Контактная область правильной пирамиды с  $m$  гранями: а)  $m = 4$ ;  
 б)  $m = 5$

В связи с линейным монотонным возрастанием контактных деформаций при стремлении к центру области контакта будем предполагать, что существует такой радиус вписанной окружности  $a_T$  ( $0 < a_T < a$ ) в многогранную область, внутри которой происходит пластическое течение. При этом, очевидно, будет выполнено равенство:

$$\varepsilon_z(a_T, y, 0)|_{\Omega} = -\frac{\sigma_T}{E}. \quad (26)$$

Поскольку в треугольнике  $\Omega$  существует треугольник пластических деформаций, внутри которого напряжение постоянны и равны  $-\sigma_T$ , а снаружи этого треугольника уравнение состояния линейно упругое, то, исходя из описания деформаций с помощью (25) и (26), можно получить на основании (4) распределение напряжений в подобласти  $\Omega$  области контакта  $S$  в виде:

$$\sigma_z|_{\Omega} = \begin{cases} E \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (x-a)}{h}, & a_T < x \leq a, \\ -\sigma_T, & 0 \leq x \leq a_T. \end{cases} \quad (27)$$

При  $x = a_T$ , исходя из (27), можно получить

$$\sigma_T = E \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - a_T)}{h}. \quad (28)$$

Отметим, что для пирамиды используется иное уравнение, чем для конуса. Для многогранной пирамиды это будет уравнение, которое с учетом (27) и (28) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} P &= -2 \cdot (m-1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot \int_0^a \sigma_z|_{\Omega} \cdot x dx = \\ &= 2 \cdot (m-1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot \left( \int_0^{a_T} \sigma_T \cdot r dr + \frac{E}{h} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \int_{a_T}^a (a-x) \cdot x dx \right) = \\ &= \sigma_T \cdot S_T + 2 \cdot (m-1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot \frac{E}{h} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \int_{a_T}^a (a-x) \cdot x dx = \\ &= \sigma_T \cdot S_T \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a}{a_T} - 1 \right) \cdot \left( \frac{a}{a_T} + 2 \right) \right), \end{aligned} \quad (29)$$



где площадь многогранного пластического отпечатка определяется

выражением  $S_T = (m-1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \cdot a_T^2$ . Выполняя в (29) подстановку,

вместо  $a = |\delta|/\operatorname{tg}(\alpha)$  можно получить:

$$P = \sigma_T \cdot S_T \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} - 1\right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} + 2\right)\right).$$

Далее при переходе к твердости по Мейеру можно вывести, что:

$$HM = \sigma_T \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} - 1\right) \cdot \left(\frac{|\delta|}{\operatorname{tg}(\alpha) \cdot a_T} + 2\right)\right).$$

Как и во всех ранее рассмотренных случаях, если выполнено неравенство для вписанных кругов в многогранные области контакта  $a_T > 0.92 \cdot a = 0.92 \cdot |\delta|/\operatorname{tg}(\alpha)$ , то с достаточной точностью твердость по Мейеру является пределом текучести материала при сжатии и в случае пирамидального индентора.

### Выводы

Впервые с помощью простейшей модели деформируемого покрытия, являющейся обобщением основания Винклера на упруго-идеально-пластический случай поведения материала однородного покрытия, установлена простейшая связь между твердостью по Мейеру и абсолютной величиной предела текучести материала при сжатии.

Установлено, что подобную связь можно получить для всех типов инденторов, используемых для проведения испытаний на твердость методом статического вдавливания.

Как показали исследования, при использовании в качестве уравнения состояния билинейной диаграммы Прандтля, соответствующей упруго-идеально-пластическому материалу, необходимость в точном определении толщины слоя модели полностью отпадает.

Установлено, что если линейный размер пластического отпечатка совпадает на 90 процентов с линейным размером полной области контакта с учетом упругих деформаций, то твердость по Мейеру и является абсолютным значением предела текучести при сжатии для исследуемого материала.

Установлено, что если отбросить гипотезу симметричности диаграмм растяжения/сжатия и, соответственно, равенства абсолютных значений обоих пределов текучести, то в данной статье теоретически установлена и полностью обоснована, только связь твердости и предела текучести при сжатии.

### Литература

1. Золоторевский В.С. Механические свойства металлов. М.: МИСИС, 1998. 400 с.
2. Справочник по цветным металлам URL: [libmetal.ru/prop/tverd.htm](http://libmetal.ru/prop/tverd.htm)
3. Логинов В.Т. и др. Влияние фторированных поверхностно активных веществ на физико-механические свойства никель фосфорных покрытий // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 (часть 2) URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1462](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1462)
4. Дерлугян Ф.П., Щербаков И.Н. Обоснование процесса получения композиционных антифрикционных самосмазывающихся материалов с заданными техническими характеристиками методом химического наноконструирования // Инженерный вестник Дона, 2010, № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/287](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/287)
5. Грушко И.С., Яценко Е.А. Разработка технологии стеклокристаллических материалов на основе шлака Несветай ГРЭС // Инженерный вестник Дона, 2009, №3 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2009/150](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2009/150)
6. Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринеля // ПММ, 1944, т.8, вып. 3. С. 201-224.

7. Shield R.T. On Plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc., 1955, A223. pp. 267-287.
8. Кравчук А.С., Кравчук А.И. Применение простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины в механике твердого тела // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. 2014. №1. URL: [//apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf](http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf)
9. Kravchuk A., Rymuza Z., Jarzabek D. Penetration of a pyramid indenter into a multilayer coating// Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.) V. 100, 2009, N 7. pp. 933-935.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. М.: Наука, 1986. 544 с.

### References

1. Zolotorevskij V.S. Mehanicheskie svojstva metallov [Mechanical properties of metals]. M.: MISIS, 1998. 400 p.
2. Spravochnik po cvetnym metallam URL: [libmetal.ru/prop/tverd.htm](http://libmetal.ru/prop/tverd.htm)
3. Loginov V.T. et al. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, № 4 (part 2). URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1462](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1462)
4. Derlugjan F.P., Shherbakov I.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2010, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/287](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2010/287)
5. Grushko I.S., Jacenko E.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2009, №3 URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2009/150](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2009/150)
6. Ishlinskij A.Ju. Applied Mathematics and Mechanics, 1944, V.8, N 3. pp. 201-224.
7. Shield R.T. Proc. Roy. Soc., 1955, A223. pp. 267-287.
8. Kravchuk A.S. APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences (Rus), 2014. №1 URL: [apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf](http://apriori-journal.ru/seria2/1-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf)
9. Kravchuk A., Rymuza Z., Jarzabek D. Int. J. Mat. Res. (formerly Z. Metallkd.) V. 100, 2009, N 7. pp. 933-935.



10. Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po matematike dlja inzhenerov i uchashhihsja VTUZOV [A handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges] M.: Nauka, 1986. 544 p.