

Кинематика плоских стержневых систем

С.А. Кузнецов

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
имени М.И. Платова
Новочеркасск

Abstract. Кинематические характеристики стержневых систем определяются в ходе кинематического анализа схемы механизма, выполненной с учетом размеров и взаимного расположения звеньев и шарниров; по аналогии со структурным анализом кинематические характеристики также включают в себя степень аномальности кинематики и степень иррациональности кинематики. Первая характеристика относится к взаимному расположению осей звеньев в цепи контура и использует размеры звеньев, вторая относится к взаимному расположению осей кинематических пар (шарниров). Показано, что подвижность кинематических цепей зависит от размерных условий - общих и частных, а кинематические связи накладываются размерами. На основе контурного подхода сформирована база знаний для высокоформализованного анализа кинематических цепей, позволяющая выявить кинематические аномалии - как лишние подвижности, обусловленные особым положением, так и кинематические избыточные связи. Показано, что для плоских кинематических цепей степень иррациональности кинематики можно выразить через структурные параметры.

Ключевые слова: кинематика, характеристики, стержневые системы, анализ, схемы, звенья, шарниры, оси, аномальность, иррациональность, связи, размерные условия

Введение. При *кинематическом анализе* исследуется **кинематическая схема** механизма, которая составлена с учетом *размеров*, определяющих взаимное расположение звеньев и кинематических пар. Условимся считать, что схема состоит из пересекающихся осей звеньев и осей кинематических пар. В плоском механизме оси кинематических пар параллельны между собой и перпендикулярны осям звеньев, поскольку ось звена совпадает с кратчайшим расстоянием между осями кинематических пар; это же расстояние будем считать размером (длиной) звена.

При анализе схема исследуется на *работоспособность*, критериями которой являются *подвижность* и *определенность положения* (часто ее называют определенностью движения, но в случае отсутствия подвижности корректнее называть критерий все же определенностью положения). Кинематические характеристики (по аналогии со структурными [1])

представляют собой разности между числом кинематических подвижностей и числом кинематических связей. Как в структурном, так и в кинематическом исследовании данная концепция использует не общепринятый групповой [2,3], а контурный подход, который показал свою эффективность и плодотворность в определении свойств механизмов и строительных систем на уровне схемы [4]. Поскольку наличие мгновенной подвижности, как и подвижности вообще, связано с положением звеньев или стержней кинематической цепи [5,6,7], примем, что *подвижность* обеспечивается кинематическими зависимостями, выраженными в виде размерных условий, определяющих взаимное положение звеньев, которые могут быть *общими*, справедливыми для любого положения схемы, и *частными*, характеризующими особые положения.

Кинематические характеристики. *Степень аномальности кинематики* K есть разность между количеством размерных условий Y , которые можно наложить на группу в данном положении, и количеством размеров Z , необходимых для построения группы в данном положении:

$$K = Y - Z. \quad (1)$$

Степень аномальности кинематики зависит, таким образом, от положения механизма, поэтому в случае, если она различается в разных положениях, можно говорить о *переменности кинематики*.

Поскольку *схема* механизма состоит из *пересекающихся осей звеньев и осей кинематических пар*, определение числа размерных условий в общем случае связано с формализацией параметров, определяющих взаимное расположение этих осей. Степень аномальности кинематики связана с взаимным расположением пересекающихся осей звеньев.

Положение осей в пространстве определяется расстоянием и углом между ними, поэтому при пересекающихся по определению осях на схему механизма (плоскую и пространственную) наложено столько общих условий

равенства нулю расстояний между осями, сколько она содержит точек пересечения, то есть кинематических пар (на монадном уровне p_m , так как в разветвленных структурах содержатся кратные пары).

Степень аномальности кинематики, таким образом, зависит от положения звеньев, а степень аномальности структуры не зависит от положения [1], но в произвольном положении группы нормальной структуры обладают свойством *кинематической определенности*, то есть для них возможно решение *первой задачи кинематики – задачи о положениях*, если известны размеры звеньев. Например, для диады (см. рис. 1а) с размерами a, b и c в произвольном положении можно записать три **общих** условия связи, а именно три условия равенства нулю расстояний между пересекающимися осями звеньев, обозначив расстояние между осями a и b как ab и т. д.:

$$ab = 0; \quad bc = 0; \quad ca = 0.$$

В произвольном положении группы на нее наложено, таким образом, три условия, а для ее построения необходимы три размера a, b, c . Степень аномальности кинематики, таким образом,

$$K = Y - Z = 3 - 3 = 0,$$

то есть кинематика нормальна, число кинематических связей равно числу кинематических подвижностей, то есть количество размеров достаточно для решения задачи о положениях.

В положении, показанном на рисунке 1,б, звенья располагаются на одной линии, поэтому можно составить **частное** размерное условие

$$a + b = c.$$

Таким образом, к общим размерным условиям добавляется еще одно, частное, поэтому степень аномальности кинематики:

$$K = Y - Z = 4 - 3.$$

Такое положение соответствует адаптивности кинематики с возможностью мгновенной лишней подвижности в кинематической цепи.

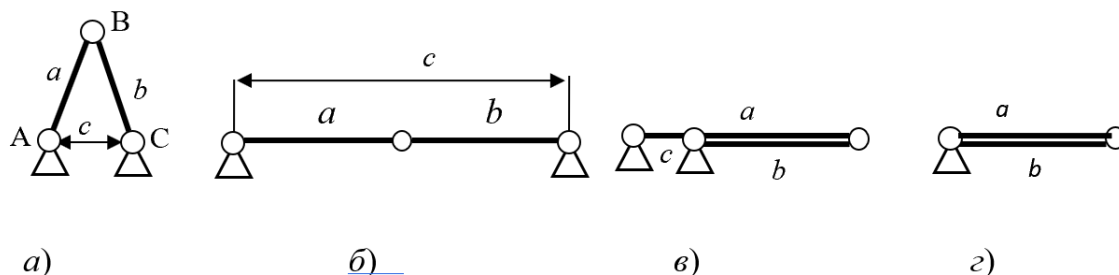


Рис. 1. Кинематические аномалии диады

Таким же свойством обладает и диада в положении, показанном на рисунке 1в, только дополнительное размерное условие формулируется иначе:

$$c + b = a.$$

При $c = 0$ и $a - b = 0$ (два частных, или дополнительных, условия) (рис. 1, г) оба звена имеют одну неподвижную ось вращения, и мгновенная подвижность заменяется вполне *постоянной*

$$K = Y - Z = 5 - 3 = 2,$$

что также соответствует адаптивности кинематики, при которой группа занимает произвольное (неопределенное) положение.

Все описанные выше случаи относятся к одной и той же группе нормальной структуры – диаде, но в различных положениях.

Рассмотрим пример определения кинематических характеристик шарнирного четырехзвенника, содержащего такую диаду. Вначале определим степень аномальности его кинематики в произвольном положении. Оси звеньев имеют четыре точки пересечения, совпадающих с шарнирами, поэтому как для пространственного, так и для плоского шарнирного четырехзвенника можно составить четыре условия равенства

нулю расстояний между осями звеньев. Пятым условием для **плоского** шарнирного четырехзвенника будет зависимость, связывающая положение всех звеньев с положением начального звена и с обобщенной координатой, называемая **функцией положения**.

Для построения шарнирного четырехзвенника необходимы также пять размеров: четыре линейных и один угловой (обобщенная координата). Таким образом, плоский шарнирный четырехзвенник в произвольном положении обладает нормальной кинематикой.

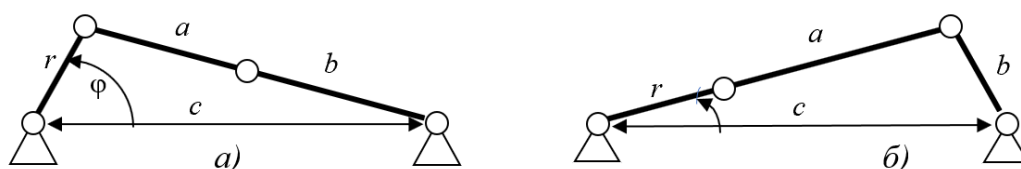


Рис. 2. К определению кинематических аномалий шарнирного четырехзвенника

В случаях, когда механизм занимает особые положения (рис. 2), в каждом из которых два звена попадают на одну линию, то есть имеют одну ось, контур кинематической цепи принимает треугольную конфигурацию, а число общих условий связи не меняется: функция положения по-прежнему справедлива.

Размеров же для построения данного контура необходимо и достаточно четырех – например, линейные размеры звеньев r , a , b , c . Обобщенная координата в этом случае не используется в построении, поскольку является избыточным размером, а функция положения принимает экстремальные значения. Степень аномальности кинематики в данном случае показывает адаптивность кинематики, которая проявляется в мертвом (неопределенном) положении выходного звена (рис.2,а), либо входного (рис.2,б):

$$K = Y - Z = 5 - 4 = 1.$$

Степень иррациональности кинематики k , по аналогии со степенью аномальности кинематики K , есть разность между числом размерных условий y на взаимное расположение **осей кинематических пар** и числом размеров z , необходимым и достаточным для построения кинематической схемы механизма в данном положении:

$$k = y - z. \quad (2)$$

Взаимное расположение осей концевых шарниров в пространстве определяется также расстоянием между осями и углом между ними. Для **плоских механизмов**, у которых все звенья движутся в параллельных плоскостях, расстояние между осями концевых шарниров равно длине звена, а угол между ними равен нулю, поскольку оси шарниров параллельны.

Такие условия позволяют компенсировать *структурные* избыточные связи в замкнутых контурах, поэтому работоспособность плоских механизмов определяется *степенью аномальности* структуры и кинематики.

Рассмотрим различные случаи кинематических иррациональностей на примере той же диады, которая в плоском варианте неподвижна (несмотря на нормальную кинематику), так как на взаимное расположение осей шарниров наложено пять размерных условий (см. рис.1,а):

$$a = a_0; \quad b = b_0; \quad c = c_0; \quad \angle AB = 0; \quad \angle AC = 0.$$

Здесь индексом «0» обозначены расстояния между осями соответствующих концевых шарниров звеньев, длины которых a, b, c ; кроме того, нулю равны углы между осями шарниров A, B и C .

Для построения такой группы достаточно трех размеров - a, b, c , поэтому степень иррациональности кинематики равна:

$$k = y - z = 5 - 3 = 2.$$

Полученные две лишние подвижности компенсируют только две из трех структурных избыточных связей [1], поэтому группа нормальной

структуры и нормальной кинематики не обладает подвижностью. Это свойство подтверждается исследованием степени иррациональности других групп нормальной структуры: для трехпроводковой группы число размерных условий, наложенных на взаимное расположение осей кинематических пар, равно 11, из которых шесть линейные (равенство размеров звеньев расстояниям между осями), и на одно меньше - на угловые соотношения (равенство нулю углов между осями шарниров). Таким образом, число условий равно удвоенному числу двухсторонних пар p_n (традиционно называемых низшими) минус единица:

$$y = 2p_n - 1,$$

где $p_n = p_3 + p_4 + p_5$ – пары третьего, четвертого и пятого классов.

Оси односторонних пар (традиционно называемых высшими, так как предполагают наибольшую подвижность соединяемых звеньев), количество которых p_v , не проходят через точку пересечения осей звеньев, и сами оси звеньев в плоском механизме не пересекаются, поэтому не соблюдается условие равенства нулю углов между осями пар, принадлежащих одному звену. С учетом этого $y = 2p_n - p_v - 1$, где $p_v = p_1 + p_2$ – пары первого и второго классов, то есть точечные и линейные.

Для плоского механизма число размеров z равно исходному, или полному числу размеров кинематической цепи Z_0 , которое независимо от сложности определяется суммой числа монад, образующих данную цепь, и числа размеров, необходимых для определенности положения неподвижных кинематических пар, число которых p_s . По данным [8], число монад определяется по формуле

$$m = S + p_0 + 2(2c - 1 + c_i)$$

где S – степень аномальности структуры;

p_0 – число входных связей (входных звеньев);

c – число независимых контуров;

c_i – число внутренних подвижных контуров.

Число неподвижных размеров находится из условия кинематической определимости для замкнутых контуров с различным числом сторон c_i

$$m_i = 2a_i - 3.$$

Так как в данном случае $a_i = p_s$, полное (исходное) число размеров:

$$Z_0 = m + m_i = S + p_0 + 2(2c - 1 + c_i) + 2p_s - 3,$$

или, после преобразований

$$Z_0 = 4p - 3n - 3. \quad (3)$$

Для двухзвенной группы $Z_0 = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 3 = 3$, а для трехповодковой $Z_0 = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 3 = 9$. Дополнительное или недостающее число размеров для цепей аномальной структуры ненулевого класса определяется степенью аномальности структуры конкретного контура, как было показано в [1].

Итак, степень иррациональности кинематики для плоского механизма:

$$k = y - Z_0 = 2p_n - p_v - 1 - 4p + 3n + 3 = 3n - 2p_n - p_v + 2 \quad (4)$$

Степень иррациональности кинематики плоской трехповодковой группы

$$k = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 2 = 2.$$

Такой же степенью иррациональности кинематики обладают и другие группы нормальной структуры или так называемые группы Ассура, не обладающие подвижностью, поскольку степень иррациональности структуры для этой группы равна $s = 3n - 3p = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -6$. Для шарнирного четырехзвенника и других четырехзвенных механизмов

$$k = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 2 = 3.$$

В этом случае все три структурные избыточные связи компенсируются кинематическими подвижностями и механизм становится и кинематически определимым, и одновременно подвижным. Разумеется, степень иррациональности кинематики не зависит от степени аномальности кинематики и не изменяется в зависимости от мгновенного положения механизма. По этой причине удастся выразить степень иррациональности кинематики **плоского механизма** через структурные параметры и почленно сложить формулу (4) со степенью иррациональности структуры [1]:

$$\begin{aligned} s + k &= 3n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 - p_2 + 3n - 2p_n - p_v + 2 \\ &= 6n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 - p_2 - 2p_5 - 2p_4 - 2p_3 - p_2 - p_1 + 2 = \\ &\quad \mathbf{6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 + 2} \end{aligned} \quad (5)$$

Данную формулу можно с полным основанием назвать **структурно-кинематической**, учитывая, что при ее составлении использованы условия параллельности осей шарниров, поэтому применима *она только для плоских механизмов*.

Рассмотрим несколько примеров применения структурно-кинематической формулы (5). Шарнирный четырехзвенник с одной цилиндрической парой:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 4p_4 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 2 = 1$$

Шарнирный четырехзвенник с двумя цилиндрическими парами:

$$s + k = 6n - 5p_5 - 4p_4 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 2 = 2$$

Лишние подвижности - на сдвиг: одна из них местная (локальная).

Шарнирный четырехзвенник, в котором две из четырех вращательных пар заменены сферическими, имеет нормальную структуру и кинематику, а степень иррациональности структуры $s = 1$, что объясняется, как правило, локальной либо групповой подвижностью, например, вращением шатуна вокруг своей оси. Степень иррациональности по структурно-кинематической формуле (5)

$$s + k = 6n - 5p_5 - 3p_3 + 2 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$$

Кроме структурной локальной подвижности, в это число вошли еще три кинематические лишние подвижности: на изгиб, на кручение и на сдвиг всей линии структурно-кинематической цепи. *Лишними данные подвижности являются в том смысле, что в плоском по определению механизме они попросту не используются, то есть не участвуют в основном движении*. В реальном же механизме, например, в подвеске переднего колеса

автомобиля, эти подвижности не являются лишними, поскольку компенсируют упругие деформации кузова автомобиля, то есть стойки, и ради этого в составе подвески применяются шаровые опоры. Здесь необходимо подчеркнуть, что, несмотря на 4 поперечные лишние подвижности, в структурном плане механизм остается нормальной структуры, поскольку степень аномальности и степень иррациональности являются независимыми характеристиками [1].

Самоустанавливаемость такого механизма объясняется, таким образом, совместным действием структурных и кинематических условий. *Под самоустанавливаемостью здесь понимается сохранение работоспособности (подвижности и определенности движения) механической системы при деформациях основания (неподвижного звена – стойки), обусловленных различными факторами (силовыми и точностными).* Здесь необходимо уточнить, что данное определение не в полной мере соотносится с пониманием Л.Н. Решетова, который самоустанавливающимися называет механизмы без избыточных связей [9]. Во второй части своей монографии он уточняет: «Выполнение механизмов статически определенными (самоустанавливающимися) позволяет... добиться их значительного улучшения» [10]. Далее он дает такое определение: «Самоустанавливающейся плоской структурной (СПС) группой называется группа звеньев, соединенной такими кинематическими парами, связи которых удерживают все звенья этой группы в одной плоскости» (авторская орфография сохранена). И все же надо отдать должное Л.Н. Решетову: именно он обозначил проблему и использовал в числе других «метод контуров» [9], а также разделил подвижности на линейные и угловые, что сближает его подход с линейной теорией структуры [1], которая предполагает наличие в контуре продольных и поперечных связей и подвижностей.

Трехзвенный механизм простой зубчатой передачи имеет суммарную степень иррациональности

$$s + k = 6n - 5p_5 - 2p_2 + 2 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2$$

Линейный анализ показывает, что лишними подвижностями могут быть неиспользуемые в плоском механизме подвижности на сдвиг и на изгиб. Замена линейной высшей пары точечной увеличивает число подвижностей

$$s + k = 6n - 5p_5 - p_1 + 2 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 + 2 = 3$$

В данном случае к вышеуказанным подвижностям на сдвиг и изгиб добавляется лишняя подвижность на кручение, которая компенсирует непараллельность осей зубчатых колес. Таким образом,

самоустанавливаемость кинематической цепи с высшими парами обусловлена *не отсутствием* структурных избыточных связей, а *наложением* кинематических условий на взаимное расположение осей кинематических пар, то есть *наличием лишних контурных подвижностей*.

При произвольном расположении осей вращательных пар в пространстве ось точечной высшей пары самоустанавливается в положение, обеспечивающее лишние подвижности, а ось линейной пары должна занимать строго определенное положение, при котором не нарушается линия контакта.

Очевидно, степень аномальности кинематики механизмов нормальной кинематики можно также попытаться выразить через структурные параметры, но только до тех пор, пока звенья не занимают какие-либо «особые» положения. Количество общих размерных условий равно количеству точек пересечения осей звеньев, то есть количеству кинематических пар на монадном уровне [8]

$$Y = p_m = (3m - p_0 - S)/2$$

Количество размеров равно исходному числу размеров (3), определенному также через структурные параметры

$$Z_0 = 4p - 3n - 3$$

Для определения степени аномальности кинематики необходимо в каждом конкретном случае учитывать размерные условия для каждого положения механизма, которое каким-либо образом изменяет число размеров, необходимых для построения положения механизма, то есть для решения первой задачи кинематики.

К сожалению, баланс поперечных структурных и кинематических связей и подвижностей при анализе как механизмов, так и строительных стержневых конструкций обычно не рассматривается и определение степени иррациональности структуры и кинематики не производится; тем не менее продвижение в этом направлении все же происходит, и настоящая работа вносит свой вклад в аналитику свойств стержневых систем.

Литература

1. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971

2. Теория механизмов и механика машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 686 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
4. Кузнецов С.А. Структура плоских стержневых систем // Инженерный вестник Дона, 2024, №10. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n10y2024/9528
5. Рабинович И.М. О структуре плоских систем // Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой и статикой плоских цепей. М.: Изд. МВТУ, 1928. 407 с.
6. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1980. 431 с.
7. Чирас А.А. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Учеб. для вузов. М.: Стройиздат, 1989. 255 с.
8. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC, URL: doi.org/10.1051/matecconf/202134603041
9. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 272 с.
10. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1991. 288 с.

References

1. Kuznetsov S.A. Linear Theory of the Structure of Mechanisms. IOP Conf.series: Materials Science and Engineering. Modeling of technical system. 2020, P. 042008, URL: iopscience.iop.org/volume/1757-899X/971
2. Teoriya mehanizmov I mehanika mashin [Theory of mechanisms and mechanics of mashines]. M.: MGTU im. N.A. Bauman, 2012. 686 p.

3. Artobolevsky I.I. Teoriya mehanizmov I mashin [Theory of mechanisms and mashines]. M.: Nauka, 1988. 640 p.
4. Kuznetsov S.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2024, №10. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n10y2024/9528
5. Rabinovich I.M. Kinematicheskij metod v stroitel'noj mehanike [Kinematic method in structural mechanics]. M.: Izd. Moskovskogo vysshego tehničeskogo uchilishha, 1928. 407 p.
6. Snitko N.K. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Vysshaja shkola, 1980. 431 p.
7. Chiras A.A. Stroitel'naja mehanika [Structural mechanics]. M.: Strojizdat, 1989. 255 p.
8. Kuznetsov S.A. Monad Theory of Structural Synthesis of Mechanisms. ICMTMTE: WEB Conference MATEC. URL: doi.org/10.1051/mateconf/202134603041
9. Reshetov L.N. Samoustanavlivauschiesya mehanizmy: Spravochnik [Self-aligning mechanisms: reference book]. M.: Mashinostroenie, 1985. 272 p.
10. Reshetov L.N. Samoustanavlivauschiesya mehanizmy: Spravochnik [Self-aligning mechanisms: reference book]. M.: Mashinostroenie, 1991. 288 p.

Дата поступления: 1.08.2025

Дата публикации: 25.09.2025