

Расчеты изгибаемых железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели с использованием ПК ЛИРА

А.Н. Малахова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация: В статье приводится и анализируется алгоритм расчета изгибаемых железобетонных конструкций по нормальному сечению на основе нелинейной деформационной модели, рекомендуемый как основной в нормах по проектированию железобетонных конструкций СП 63.13330.2018. Рассмотрены особенности выполнения расчета с использованием рассматриваемого алгоритма, а также другие подходы к расчету изгибаемых железобетонных конструкций по нормальному сечению на основе деформационной и других моделей. Показана последовательность выполнения расчетов с использованием компьютерных технологий на примере выполнения расчетов в системе *инженерная нелинейность1* ПК ЛИРА-САПР. Приведены результаты расчета стержневого элемента расчетной схемы. Описаны дополнительные возможности выполнения расчетов с использованием системы *инженерная нелинейность2*.

Ключевые слова: изгибаемые железобетонные конструкции, нелинейная деформационная модель, расчетная схема, алгоритм расчета, ПК ЛИРА-САПР, система, инженерная нелинейность.

Введение

Основным нормативным документом по проектированию железобетонных конструкций зданий и сооружений является СП 63.13330.2018, который регламентирует выполнение расчетов изгибаемых железобетонных конструкций как по предельным усилиям, так и на основе нелинейной деформационной модели. Расчет железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели является приоритетным [1, 2], так как при прочностных расчетах нормального сечения элемента расширяется набор контролируемых параметров, что приводит к более точному описанию работы строительных конструкций.

Продвижению расчетов железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели способствовала возможность использования компьютерных программ, без которых выполнение расчетов по математически сложным алгоритмам было бы затруднительным.

Прочностные расчеты нормальных сечений изгибаемых железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели

При выполнении прочностных расчетов на основе нелинейной деформационной модели в нормальном сечении изгибаемого стержневого элемента в общем случае следует учитывать одновременное действие изгибающих моментов M_x и M_y , а также нормальной силы N , получаемых из статического расчета. Расчетом проверяется прочность нормальных сечений, которая обеспечивается, когда относительные деформации наиболее сжатого волокна бетона $\varepsilon_{b,max}$ и наиболее растянутого стержня арматуры $\varepsilon_{s,max}$ меньше предельного значения относительной деформации бетона при сжатии $\varepsilon_{b,ult}$ и предельного значения относительного удлинения арматуры $\varepsilon_{s,ult}$:

$$|\varepsilon_{b,max}| \leq \varepsilon_{b,ult}, \quad \varepsilon_{s,max} \leq \varepsilon_{s,ult}$$

Для выполнения расчетов на основе нелинейной деформационной модели должна быть описана связь между осевыми напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры, приведенная в виде криволинейных диаграмм или в виде упрощенных трехлинейных (двухлинейных) диаграмм (рис. 1а).

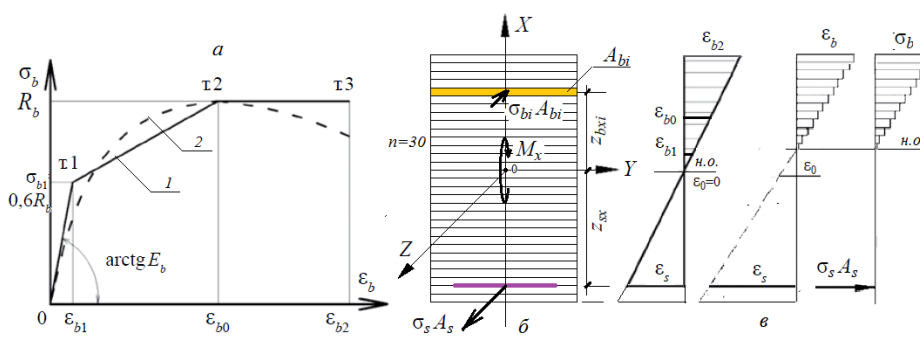


Рис. 1. К прочностному расчету нормального сечения на действие изгибающего момента M_x на основе нелинейной деформационной модели: а – трехлинейная диаграмма бетона $\sigma - \varepsilon$ (1); криволинейная диаграмма бетона $\sigma - \varepsilon$ (2); б – схема нормального сечения с послойной разбивкой по высоте на элементы ($n=30$); в – распределение относительных деформаций ε и

напряжений σ по нормальному сечению рассчитываемого железобетонного элемента

Уравнения равновесия внешних и внутренних сил, включающие в себя жесткостные характеристики элементов строительных конструкций ($D_{11}... D_{33}$), кривизну продольной оси элемента по соответствующему направлению ($1/r_x, 1/r_y$), относительные деформации (ϵ_0) волокна элемента, расположенного в начале выбранных координатных осей, имеют следующий вид:

$$M_x = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{13} \cdot \epsilon_0;$$

$$M_y = D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \epsilon_0;$$

$$N = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \epsilon_0.$$

Эти уравнения могут быть решены с привлечением сложного математического аппарата. Если же в нормальном сечении рассчитываемого элемента действует только изгибающий момент M_x , то система приведенных выше уравнений будет упрощена:

$$M_x = D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{13} \cdot \epsilon_0; 0 = D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{33} \cdot \epsilon_0.$$

Здесь неизвестными являются кривизна продольной оси элемента по оси X ($1/r_x$) и относительные деформации (ϵ_0) волокна элемента, расположенного в начале выбранных координатных осей (точка 0) X, Y, Z (рис. 1б). В этом случае будет иметь место следующая последовательность выполнения прочностного расчета нормального сечения изгибаемого элемента на основе нелинейной деформационной модели.

Жесткостные характеристики (D_{11}, D_{13}, D_{33}) определяются по формулам (рис. 1б).

$$D_{11} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi}^2 \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj}^2 \cdot E_{sj} \cdot v_{sj};$$

$$D_{13} = \sum_i A_{bi} \cdot Z_{bxi} \cdot E_b \cdot v_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot Z_{sxj} \cdot E_{sj} \cdot v_{sj}.$$

Осевая жесткость:

$$D_{33} = \sum_i A_{bi} \cdot E_b \cdot \nu_{bi} + \sum_j A_{sj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj};$$

Коэффициенты ν_{bi} , ν_{sj} определяются по формулам:

$$\nu_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \cdot \varepsilon_{bi}}; \quad \nu_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \cdot \varepsilon_{bi}};$$

В начале прочностного расчета коэффициенты ν_{bi} , ν_{sj} предварительно назначаются равными единице, далее они вычисляются по приведенным выше формулам и подставляются в формулы прочностного расчета.

В соответствии с рекомендациями, изложенными в [1], нормальное сечение, приведенное на рис. 1б, разбивается по высоте на 30 полос. С увеличением числа разбиений точность расчетов повышается.

Как показано на рисунке 1в, продольные относительные деформации ε в нормальном сечении распределяются по линейному закону с учетом назначенного расположения начала системы координат, а также кривизны продольной оси элемента ($1/r_x$) и относительных деформаций ε_0 волокна элемента, расположенного в начале координат (точка 0), определенных на основе уравнений равновесия внешних и внутренних сил.

При этом нейтральная ось, первоначально помещенная в центр тяжести сечения в предположении нулевого значения ε_0 , перемещается в соответствии с полученным в результате расчета значением ε_0 . Характер распределения напряжений σ аналогичен характеру распределения относительных деформаций ε , а их связь определяется соответствующими диаграммами σ - ε для бетона и арматуры.

Расчет ведется итерационно. Для итерации №1 будет установлено ε_{01} и $k_{x1} = 1/r_{x1}$, для итерации №2 – ε_{02} и $k_{x2} = 1/r_{x2}$ и т.д.

В ходе выполнения итерационных расчетов необходимо оценить погрешность вычисленных двух компонентов вектора деформаций:

относительной деформации волокна (ε_0) в точке 0 – точке привязки выбранных координатных осей X, Y, Z, а также кривизны продольной оси элемента ($k_x = 1/r_x$), которая определяется по формуле:

$$\sqrt{\frac{[(\frac{\varepsilon_{0(n)} - \varepsilon_{0(n+1)}}{\varepsilon_{0(n)}})^2 + (\frac{k_{x(n)} - k_{x(n+1)}}{k_{x(n)}})^2]}{n}} \leq \delta$$

Значение δ в [1] рекомендуется принимать 0,01. После достижения значения $\delta \leq 0,01$ итерационные вычисления прекращаются. Обычно требуется три итерации.

Кроме расчетов на основе деформационной модели, регламентируемых СП 63.13330.2018, в настоящее время разрабатываются и другие подходы к расчету железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели.

Например, в [3] показано, что при расчетах в нелинейной постановке диаграммы σ - ε могут быть описаны сплайн-функцией, степенной функцией или полиномом и учтены при составлении системы уравнений для различных стадий НДС изгибаемого элемента.

В [4] приводится обзор и анализ современных расчетных моделей в теории железобетона и возможности их реализации с использованием эффективных программных комплексов, к которым относится ПК ЛИРА-САПР

Расчеты железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели в ПК ЛИРА

Для выполнения расчетов железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели в ПК ЛИРА-САПР предусмотрена система *инженерная нелинейность* [5].

Регламентируемые нормативными документами расчеты конструктивной системы зданий в нелинейной постановке [6] выполняются в ПК ЛИРА-САПР после предварительных расчетов с подбором арматуры для железобетонных конструкций. В ходе выполнения расчета задаются законы деформирования бетона и арматуры, описывается армирование несущих элементов расчетной схемы.

Для выполнения расчета привлекается *шаговый процессор*. При этом необходима замена стандартных конечных элементов расчетной схемы на специальные для решения задач в нелинейной постановке.

На каждом из заданных пользователем шагов решается линеаризованная задача с формированием векторов перемещений, усилий и интегральных жесткостей, для которых модуль деформации бетона определяется по касательному модулю (рис. 2а). Кроме того, для выполнения таких расчетов можно использовать экспериментально полученные диаграммы σ - ε [7].

При выполнении расчетов в системе *инженерная нелинейность* [8, 9] в рамках использования команды *жесткости и материалы* для бетона можно выбрать двухлинейную или трехлинейную диаграмму σ - ε . Нагружение расчетной схемы уточняется перечислением нагрузок в специально предусмотренном диалоговом окне.

Разбивка нормального сечения на отдельные элементы и назначение числа итераций, предусмотренные при выполнении расчета на основе нелинейной деформационной модели, в системе *инженерная нелинейность* производятся автоматически. После начального подбора арматуры в ходе последующего итерационного расчета для каждой итерации уточняются жесткостные характеристики конечных элементов расчетной схемы и, соответственно, напряженно-деформированное состояние и армирование железобетонных конструкций.

На рисунке 2б представлены результаты расчета стержневого элемента расчетной схемы в системе *инженерная нелинейность 1*. Показано изменение изгибающего момента, жесткости и модуля деформаций для конечных элементов по длине стержня.

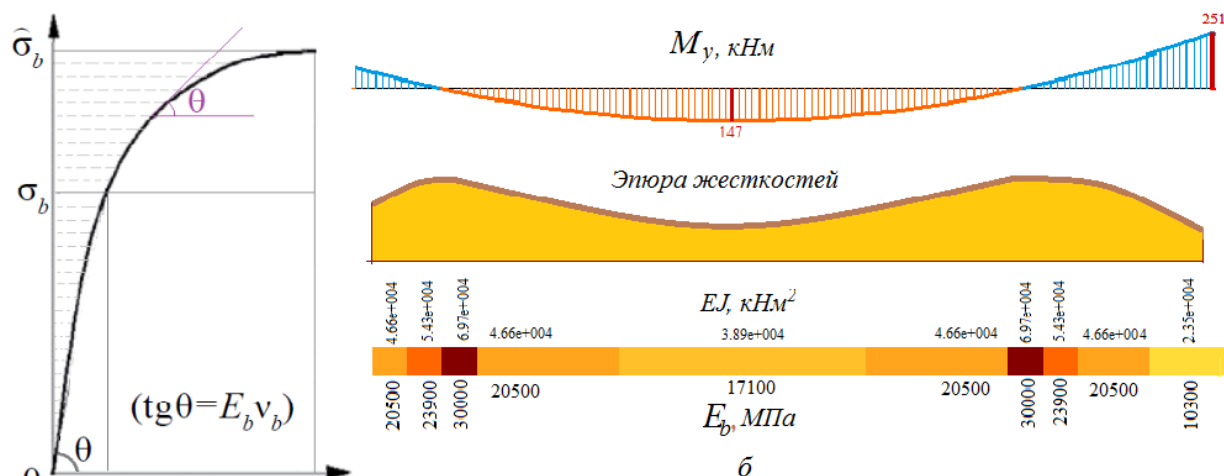


Рис. 2. Определение касательного модуля деформации бетона E_b i -го шага процессора при расчете в нелинейной постановке (а); результаты расчета в системе *инженерная нелинейность 1*: эпюра изгибающего момента M_y , эпюра жесткостей и значение жесткостей конечных элементов по длине стержня (б)

Анализ результатов расчета показывает, что предварительно заданные для конечных элементов расчетной схемы одинаковые жесткостные характеристики в результате расчета в системе *инженерная нелинейность 1* изменяются в зависимости от напряженно-деформированного состояния конечных элементов.

При этом расчет в системе *инженерная нелинейность 1* является обычным расчетом с подбором арматуры, но с последующей корректировкой жесткостных характеристик конечных элементов, выполняемой в ходе итерационного расчета, с уточнением напряженно-деформированного состояния, прогиба элемента и его армирования.

Заключение

Расчеты изгибаемых железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели, как показано в статье, могут выполняться с использованием ПК ЛИРА в системе *инженерная нелинейность1*. Расчеты в системе *инженерная нелинейность1* отличаются простотой выполнения, но сама система потребовала доработки [10] в части расширения возможности назначения различных законов деформирования материалов, описания нагружения расчетной схемы, армирования конструкций, возможности использования шагового процессора, что было реализовано разработчиками ПК ЛИРА в системе *инженерная нелинейность2*.

Литература

1. Трекин Н.Н., Алексейцев А.В., Бобров В.В., Домарова Е.В. Расчет железобетонных изгибаемых конструкций на основе нелинейной деформированной модели. М.: МИСИ-МГСУ, 2023. – URL: lib.mgsu.ru. 62 с.
2. Мирсаяпов И.Т., Ласьков Н.Н., Апхадзе Г.Т., Мирсаяпов А.И. Нелинейные расчеты железобетонных конструкций. Пенза: ПГУАС, 2024. 138 с.
3. Коянкин А.А. О расчете железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели // Academia. Архитектура и строительство. 2025. №1. С. 152-159.
4. Федоров В.С., Левитский В.Е. Расчетные модели в теории расчета железобетона // Перспективы развития строительного комплекса. Московский государственный университет путей сообщения, 2014. Т. 1. С. 268-278.
5. Малахова А.Н. Некоторые особенности расчета железобетонных конструкций на основе нелинейной деформированной модели // Актуальные

проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений. IX Международный симпозиум. Пенза: ПГУАС, 2025. С.155-156.

6. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. М.: АСВ, 2009. 360с.

7. Безгодов И.М. Диаграммы деформирования бетона различных структур // Международная научная конференция. XVI Академические чтения. М.: НИИСФ РААСН, 2025, С. 10-14.

8. Городецкий А.С., Барабаш М.С. Учет нелинейной работы железобетона в ПК ЛИРА-САПР. Метод «инженерная нелинейность» // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. М.: АСВ, 2016. Т. 12. № 2. С. 92-98.

9. Пикуль А. В., Городецкий Д.П. Определение жесткостных характеристик сечения железобетонного стержня с учетом нелинейных свойств материала // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений. Тезисы докладов IV Международного симпозиума. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. С. 228.

10. Дядьков С.Ф., Трофин К.А. Физическая нелинейность железобетонных конструкций в расчетных программных комплексах // Инженерные исследования, 2024. № 4(19). С. 3-11.

References

1. Trekin N.N., Alekseytsev A.V., Bobrov V.V., Domarova E.V. Raschet zhelezobetonnykh izgibayemykh konstruktsiy na osnove nelineynoy deformirovannoy modeli [Calculation of reinforced concrete bending structures based on a nonlinear deformed model]. М.: МИСИ-МГСУ, 2023. URL: lib.mgsu.ru. 62 p.

2. Mirsayapov I.T., Laskov N.N., Apkhadze G.T., Mirsayapov A.I. Nelineynyye raschety zhelezobetonnykh konstruktsiy [Nonlinear calculations of reinforced concrete structures]. Penza: PGUAS, 2024. 138 p.
3. Kojankin A.A. Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo. 2025. No. 1. Pp. 152-159.
4. Fedorov V.S., Levitsky V.E. Perspektivy razvitiya stroitel'nogo kompleksa. Moskovskiy gosudarstvennyy universitet putey soobshcheniya, 2014. Vol. 1. Pp. 268-278.
5. Malakhova A.N. Aktual'nyye problemy komp'yuternogo modelirovaniya konstruktsiy i sooruzheniy. IX Mezhdunarodnyy simpozium. Penza: PGUAS, 2025. Pp.155-156.
6. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. Komp'yuternyye modeli konstruktsiy [Computer models of structures]. M.: ASV, 2009. 360 p.
7. Bezgodov I.M. Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya. XVI Akademicheskkiye chteniya. M.: NIISF RAASN, 2025. Pp. 10-14.
8. Gorodetsky A.S., Barabash M.S. Mezhdunarodnyy zhurnal po raschetu grazhdanskikh i stroitel'nykh konstruktsiy. M.: ASV, 2016. Vol. 12. No. 2. Pp. 92-98.
9. Pikul A. V., Gorodetsky D. P. Aktual'nyye problemy komp'yuternogo modelirovaniya konstruktsiy i sooruzheniy. Tezisy dokladov IV Mezhdunarodnogo simpoziuma. Chelyabinsk: Izdatel'skiy tsentr YUUrGU, 2012. P. 228.
10. Dyadkov S.F., Trofin K.A. Inzhenernyye issledovaniya, 2024. No. 4(19). Pp. 3-11.

Дата поступления: 17.07.2025

Дата публикации: 25.09.2025