

Расчёт на прочность гофрированной тонкой пластины на упругом основании обратным методом

Е.Э. Кадомцева, Н.В. Сикачёва, Ю.А. Кирсанов

*Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического
университета, Ростов-на-Дону*

Аннотация: В работе рассматривается прямоугольная пластина, подкреплённая рёбрами жёсткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Пластина опирается на упругое основание и нагружена распределённой нагрузкой по следующему закону

$q = q_0 * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b}$. Задача решается обратным методом. Функция прогибов

пластины задаются в виде: $w = C * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b}$. За расчётную схему принимается шар-

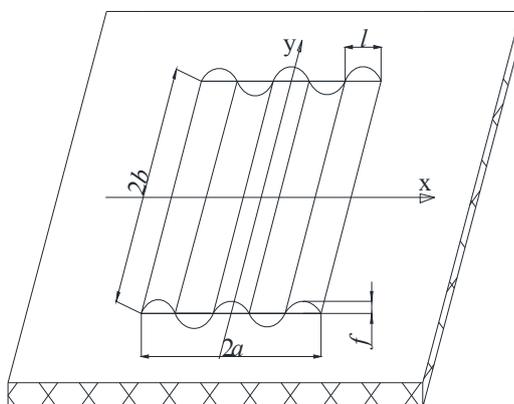
нирно опёртая ортотропная пластина на упругом Винклеровском основании. Исследуется напряженное состояние и проводится расчет на грузоподъемность для различных параметров пластины и основания. Расчёты показали, что грузоподъёмность волнистой пластины выше по сравнению с грузоподъёмностью плоской пластины.

Ключевые слова: гофрированная, пластина, упругое основание, обратный метод, тонкая, ортонормированная, изгиб, грузоподъёмность, прочность.

Пластина на упругом основании является широко распространённой моделью конструктивных элементов объектов строительства, машиностроения, приборостроения, авиастроения, судостроения и т.д.

Аналитические решения для пластин являются альтернативными по отношению к решениям, полученным численными методами, если для расчетов ответственных объектов требуется подтверждение достоверности полученных результатов [1-4].

Проводилось исследование напряженного состояния и расчет на грузоподъемность для различных параметров пластины и основания. Выбор модели основания Винклера обусловлен тем, что, винклеровская модель математически проста и дает достаточно хорошие результаты.



Рис

1. Волнистая пластина на упругом основании. b – ширина пластины; a – длина пластины; f – высота волны пластины; l – длина волны пластины.

За расчётную схему принимается ортотропная шарнирно опёртая пластина, имеющая различные цилиндрические жёсткости в двух взаимно перпендикулярных направлениях, зависящих от жёсткости подкрепляющих рёбер. [5 – 6].

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины на упругом основании в этом случае имеет вид [7-11]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + Kw = q(x, y) \quad (1)$$

$$\text{где } D_1 = \frac{1}{s} * \frac{Eh^3}{12*(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$$D_2 = 0,5 * E * h * f^2 * \left(1 - \frac{0,81}{1+4*(\frac{f^2}{a^2})} \right) \quad (3)$$

$$D_3 = 2D_k = \frac{s}{l} * \frac{Eh^3}{12*(1+\nu)} \quad (4)$$

$$S = l * \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right) \quad (5)$$

K – коэффициент постели, $q(x, y)$ – распределённая нагрузка, w – прогиб пластины, h – толщина пластины, E – модуль упругости при растяжении, ν – коэффициент Пуассона, f – амплитуда волны, l – длина волны.

Нагрузка, действующая на пластину, распределена по закону:

$$q = q_0 * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (6)$$

Функция прогибов пластины задаются в следующем виде:

$$w = C * \sin \frac{2\pi x}{a} * \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (7)$$

Постоянная C определяется из уравнения (1):

$$C = \frac{q_0}{D_1 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 + 2D_2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + K}$$

Максимальные нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{x \max} = \frac{6M_{x \max}}{h^2} = \frac{6}{h^2} \max \left| D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right|,$$

$$\sigma_{y \max} = \frac{6M_{y \max}}{h^2} = \frac{6}{h^2} \max \left| D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем q_0 .

Таблица № 1

Грузоподъемность пластины в зависимости от высоты волны

Высота волны f , м	Длина волны l , м	Максимальное нормальное напряжение σ_x^{\max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа	Максимальное нормальное напряжение σ_y^{\max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа
0,01	0,05	$0,83q_0$	192,77	$10,24q_0$	15,63

0,0125		0,797 q_0	200,75	16,74 q_0	9,56
0,015		0,749 q_0	213,6	25,59 q_0	6,25
0,018		0,69 q_0	231,88	39,49 q_0	4,05
0,02		0,66 q_0	242,4	50,7 q_0	3,16



Диаграмма 1 – f – высота волны, q_0 – Предельно допустимая нагрузка, МПа.

Как видно из результатов расчетов, чем больше высота волны, тем больше предельно допускаемая нагрузка по оси x и меньше по оси y .

Таблица № 2

Грузоподъемность пластины в зависимости от длины волны

Длина волны l , м	Высота волны f , м	Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max}	Предельно допускаемая нагрузка q_0 , МПа	Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max}	Предельно допускаемая нагрузка q_0 , МПа
0,04	0,01	0,857 q_0	186,7	10,7 q_0	14,95
0,05		0,83 q_0	192,77	10,24 q_0	15,63

0,06		0,857 q_0	186,7	9,9 q_0	16,2
0,07		0,874 q_0	183,07	9,75 q_0	16,4
0,08		0,88 q_0	181,8	9,65 q_0	16,58



Диаграмма 2 – l – длина волны, q_0 – Предельно допустимая нагрузка, МПа.

Вывод: чем больше длина волны пластины, тем меньше предельно допускаемая нагрузка по оси x и больше по оси y .

Таблица № 3

Грузоподъемность пластины в зависимости от коэффициента постели упругого основания

Коэффициент постели основания K , Мпа/м	Длина волны l , м	Высота волны f , м	Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа	Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 , МПа
100 (песок)	0,05	0,01	3,3 q_0	48,5	40,95 q_0	3,9

200 (грунт песчано-глинистый, уплотненный)			$1,66q_0$	96,38	$20,475q_0$	7,8
400 (известняк)			$0,83q_0$	192,77	$10,24q_0$	15,63
600 (бутовая кладка)			$0,55q_0$	290,9	$6,8q_0$	23,53
800 (бетон)			$0,42q_0$	380,95	$5,1q_0$	31,37



Диаграмма 3 – K – коэффициент постели, q_0 – Предельно допустимая нагрузка, МПа.

Вывод: из расчетов видно, что между коэффициентом жесткости упругого основания и предельно допустимой нагрузкой по оси x и y , прямо пропорциональная зависимость.

В ходе исследования был проведен сравнительный анализ предельно допустимой нагрузки для гофрированной пластинки и прямоугольной плоской пластины. Результаты расчетов показали, что выгоднее использовать гофрированную пластину.

Таблица № 4

Результаты расчетов прямой прямоугольной и гофрированной пластин

	Длина волны l , м	Высота волны f , м	Максимальное нормальное напряжение σ_x^{max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 МПа(расчёт по σ_x^{max})	Максимальное нормальное напряжение σ_y^{max}	Предельно допустимая нагрузка q_0 МПа(расчёт по σ_y^{max})
Плоская пластина	0,05	0,01	$0,177 q_0$	903,95	$71,4 q_0$	2,24
Гофрированная пластина			$0,83 q_0$	192,77	$10,24 q_0$	15,63

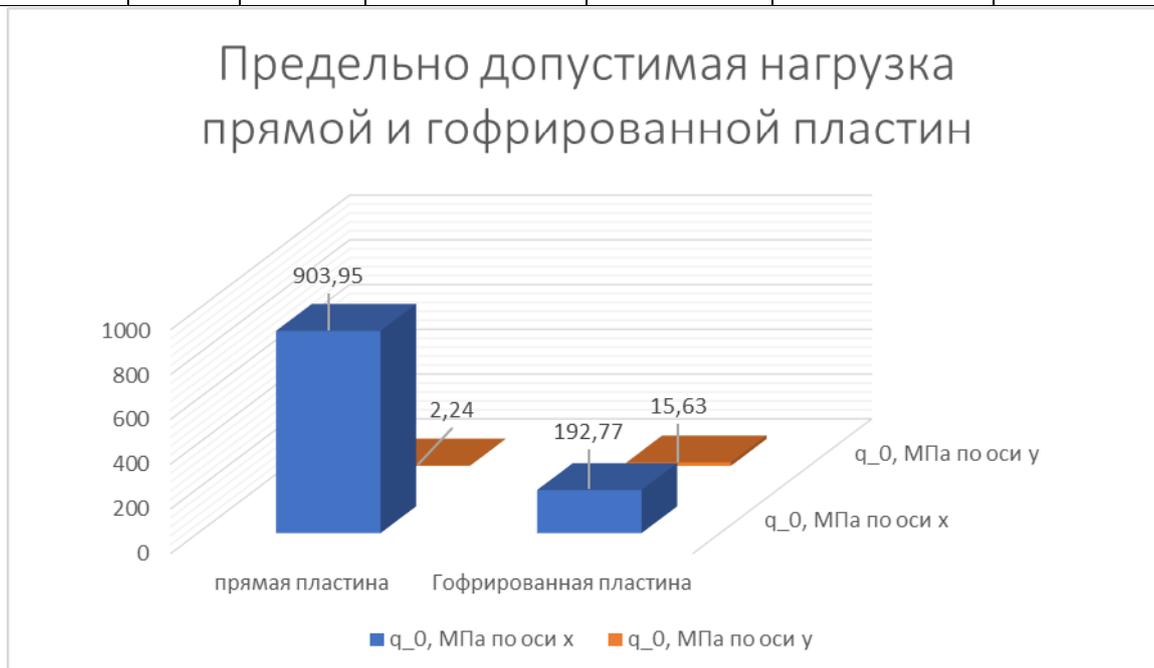


Диаграмма 4 . q_0 - Предельно допустимая нагрузка(МПа).

Вывод: исследование показало, что грузоподъёмность, гофрированной пластины выше, чем прямоугольной. Несмотря на то, что предельно допустимая нагрузка по оси x намного больше у прямой пластины, предельно допустимая нагрузка по оси y в 6,9 раз в прямой пластине меньше, чем в гофрированной пластине.

Исследование показало, что напряженное состояние и грузоподъёмность гофрированной пластины на упругом основании во многом зависит от геометрических параметров пластины и от жесткости основания, на которое опирается сама пластина. Данный метод позволяет исследовать влияние параметров пластины, рёбер и характеристик упру-



гого основания на прочность волнистой пластины на упругом основании при изгибе и востребован при расчёте элементов инженерных конструкций[12-14].

Литература

1. Кадомцева Е.Э., Моргун Л.В. Учёт влияния отличия модулей упругости на сжатие и растяжение при расчёте на прочность армированных балок с заполнителем из фибропенобетона. // Инженерный вестник Дона, 2013, № 2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
2. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н. Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различных теорий прочности. // Инженерный вестник Дона, 2013, № 4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.
3. Матвеев С.А., Мартынов Е.А., Литвинов Н.Н. Расчёт армированной дорожной одежды как многослойной плиты на упругом основании. // Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии. Сер.: Механика. 2015. Вып.4(45)с. 72-76.
4. Большаков А.А. Прямоугольная пластина, упруго опертая по контуру // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2011. Вып. 4 (19). URL: vestnik.vgasu.ru
5. Belen'kii D.M., Beskopyl'nyi A.N., Vernezi N.L., Shamraev L.G. New approach to the strength analysis of awelded butt joint. Industrial Laboratory. 1996. V., С. 62. № 8. pp. 517-520.
6. Беленький Д.М., Бескопыльный А.Н. Измерение вектора механических свойств материала деталей машин. Вестник машиностроения. 1997. № 8. С. 44.
7. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н., Бердник Я.А. Расчёт на жёсткость пластины, подкреплённой рёбрами, на упругом основании методом Бубнова-Галёркина. Инженерный вестник Дона, 2016, № 3 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2016/3699/.



8. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т.1. - М. изд-во "Наука", Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. -832 с.
9. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. - М. Высшая школа 1987. - 576 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Под общей редакцией Биргер И.А. и Пановко Я.Г. Т.2. - М., изд-во "Машиностроение", 1988.- с.464.
11. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. - М. изд-во "Физматлит", МАИК «Наука/Интерпериодика», 2007.-687 с.
12. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ.-М.: Мир, 1984.-494 с.
13. Shukla S.K. Shallow foundations in geosynthetics and their applications. - Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163
14. Yin J.H. Comparative modeling study on reinforced beam on elastic foundation. In Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol.126, No.3., pp.265-271.

References

1. Kadamceva E.E., Morgun L.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655/.
2. Kadamceva E.E., Beskopyl'nyj A.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, № 4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/2125/.
3. Matveev S.A., Martynov E.A., Litvinov N.N. Vestnik Sibirskoj gosudarstvennoj avtomobil'no-dorozhnoj akademii. Ser.: Mehanika. 2015. Vyp.4 (45) 72.76 p.
4. Bol'shakov A.A. Internet.vestnik VolgGASU. Ser.: Politematicheskaja. 2011. Vyp. 4 (19). URL: vestnik.vgasu.ru
5. Belen'kii D.M., Beskopyl'nyi A.N., Vernezi N.L., Shamraev L.G. Industrial Laboratory. 1996. V. 62. № 8. pp. 517.520.

6. Belen'kij D.M., Beskopyl'nyj A.N. Vestnik mashinostroeniya. 1997. № 8. p. 44.
7. Kadomceva E.Je., Beskopyl'nyj A.N., Berdnik Ja.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2016, № 3 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2016/3699/.
8. Filin A.P. Prikladnaja mehanika tvjordogo deformiruemogo tela. [Applied mechanics of a rigid deformable body.] V.1. M. izd.vo" Nauka", Gl. red.fiz.mat. literatury, 1981. 832 p.
9. Simvulidi I.A. Raschet inzhenernyh konstrukcij nauprugom osnovanii. [Calculation of engineering structures on an elastic foundation] M. Vysshajashkola. 1987. 576 p.
10. Prochnost', ustojchivost', kolebanija. Spravochnik v trjohtomah. Pod obshhredakciej Birger I.A. i PanovkoJa.G. [Strength, stability, vibrations. Reference book in three volumes. Under the general editorship Birger IA and PanovkoYa.G.] V.2. M., izd.vo "Mashinostroenie", 1988. p.464.
11. Myshkis A.D. Prikladnaja matematika dlja inzhenerov. Special'nye kursy. [Applied mathematics for engineers. Special courses.] M. izd.vo "Fizmatlit", MAIK «Nauka. Interperiodika», 2007. 687 p.
12. Benerdzhi P., Batterfild R. Metod granichnyh elementov v prikladnyh naukah.: Per. s ang. [Method of boundary elements in applied sciences: Trans. with eng.]M.: Mir, 1984. 494 p.
13. Shukla S.K. Editor Thomas Telford, London. 2002. pp. 123-163.
14. Yin J.H. In Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol.126, No.3., pp.265-271.