

Применение метода дифференциальных квадратур к задаче изгиба пластины

А.А. Мамонова, Л.П. Москаленко

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Аннотация: В статье представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния пластины Софи Жермен-Лагранжа, полученные с помощью приближенных методов решения дифференциальных уравнений: метода Бубнова-Галеркина, метода конечных разностей и метода дифференциальных квадратур. Показано, что метод дифференциальных квадратур с использованием сетки Чебышева является эффективным методом решения задач на изгиб тонких прямоугольных пластин и позволяет получать результаты высокой точности при использовании ограниченного количества узлов.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, приближенное решение, метод дифференциальных квадратур, сетка Чебышева, пластина Софи Жермен-Лагранжа, изгиб пластины, напряженно-деформированное состояние.

В настоящее время решение множества актуальных задач прикладной инженерии сводится к поиску решения дифференциальных уравнений (ДУ), которые помимо самой неизвестной функции содержат также и её производные. Найти в общем виде точное решение ДУ возможно только для узкого класса задач, в остальных случаях следует прибегать к приближенным методам решения.

Традиционно приближённые методы разделяют на аналитические и численные. Первые, обычно, предполагают разложение искомого решения в ряд по системе известных функций, удовлетворяющих краевым и/или начальным условиям. Приближённое решение в таком случае представляет собой конечную сумму такого ряда. Например, к таким методам относится метод Бубнова-Галёркина (МБ-Г) [1, 2]. Второй класс методов предполагает дискретизацию области, на которой задано ДУ, т.е. производится поиск решения не в виде функции, а в виде набора её значений в конкретных точках. В таком случае необходимо заменить непрерывные производные, участвующие в ДУ, их дискретным аналогом. В зависимости от того, как он

строится, различаются и методы. К данным методам относятся: метод граничных условий (МГУ) и метод конечных разностей (МКР) [3]. Также дополнительно можно выделить полуаналитические методы, к которым, например, относят метод конечных элементов (МКЭ) [4, 5].

Одним из относительно новых численных методов решения ДУ является метод дифференциальных квадратур (МДК), впервые предложенный Р. Беллманом в начале 1970-х годов [6, 7] и продолжающий активно развиваться в настоящее время [8, 9].

Особый интерес этот метод представляет в исследованиях, связанных с напряжённо-деформированным состоянием (НДС) строительных конструкций, где важна высокая точность получаемых результатов при небольших вычислительных затратах. Одним из примеров такой задачи является изгиб тонких прямоугольных пластин. Тонкостенные пластины широко применяются в строительстве, авиации, машиностроении и других отраслях, что делает задачу по отысканию решения на изгиб актуальной в настоящее время. Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб пластины в модели Софи Жермен-Лагранжа, является ДУ 4-го порядка [10]. Данное уравнение не имеет точного решения, поэтому для исследования НДС пластины необходимо использовать приближённые методы.

К категории пластин относятся конструктивные элементы, у которых толщина (h) в разы меньше двух других размеров (a , b), имеющих один порядок.

Срединная поверхность пластины – это воображаемая плоскость, которая делит пластину по толщине на две равные части. Контуром называется линия пересечения срединной поверхности с боковой поверхностью. По контуру пластина имеет закрепление, влияющее на распределение напряжений в пластине и характер её прогиба.

Теория пластин Софи Жермен-Лагранжа опирается на гипотезы Кирхгофа [10]. Данные гипотезы позволяют упростить модель пластины, превращая её в двумерную математическую модель идеально упругого тела. Эта теория позволяет определять напряжения и деформации в тонких пластинах при малых изгибах под воздействием нагрузки.

Таким образом математическая модель деформации пластины сводится к зависимости деформации только от прогиба $w(x,y)$; перемещения вдоль осей x и y (u и v соответственно) выражаются через прогиб w , что в свою очередь дает возможность определить линейные и угловые перемещения, используемые при построении уравнений равновесия и расчетах напряженно-деформированного состояния пластины. Функция прогиба пластины $w(x,y)$ должна удовлетворять условиям опирания пластины на краях (по контуру), то есть граничным условиям. В случае защемленных краев пластины должны быть равны нулю прогиб и углы наклона касательной к изогнутой срединной поверхности; при шарнирном опирании допускается свободный поворот опертого края в перпендикулярном к нему направлении и не допускается прогиб.

Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб пластины, получается при подстановке формул напряжений в уравнение равновесия и выглядит следующим образом:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y),$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – жесткость пластины; $q(x, y)$ – нагрузка; E, h, μ – модуль

Юнга, толщина, коэффициент Пуассона пластины.

Для получения полуаналитического решения представленного ДУ может быть применен метод Бубнова-Галеркина. Принцип этого метода для случая плоской пластины заключается в том, что функция прогибов

заменяется её приближённым выражением в виде двойного ряда по выбранным базисным функциям. При этом базисные функции заранее подбираются таким образом, чтобы удовлетворять граничным условиям на краях пластины [11].

В случае решения ДУ методом конечных разностей (МКР) на область рассматриваемого тела наносится сетка линий, точки пересечения которых называются узлами. Производные в дифференциальных уравнениях аппроксимируются приближенными алгебраическими формулами [6]. Эти формулы называются конечно-разностными и неизвестными в них являются значения функций в узлах. Замена производных в дифференциальном уравнении конечно-разностными формулами приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Граничные условия, содержащие производные, с помощью конечно-разностных формул также заменяются алгебраическими уравнениями. Решение системы линейных алгебраических уравнений позволяет найти распределение напряжений в теле и изменения его размеров и формы. Точность вычисления прогиба зависит от числа делений балки на равные части.

Метод дифференциальных квадратур (МДК) является численным методом, который использует взвешенные суммы значений функции в дискретных точках для аппроксимации производных [12]. В отличие от метода конечных разностей, который использует локальные аппроксимации производных через соседние узлы, МДК использует глобальную аппроксимацию: производные выражаются через взвешенные суммы значений функции во всех узлах расчетной области. Это позволяет достичь более высокую точность при относительно небольшом числе точек.

Согласно МДК, производная n -го порядка функции $f(x)$ в точке x_i аппроксимируется взвешенной линейной суммой значений этой функции во всех точках дискретной области:

$$\frac{d^n f(x_i)}{dx_i^n} \approx \sum_{j=1}^N k_{ij}^{(n)} f(x_j),$$

где $k_{ij}^{(n)}$ – весовые коэффициенты, которые зависят от выбора узловых точек и порядка производной; N – число узлов сетки в расчетной области; $f(x_i)$ – значение функции в узловой точке x_i .

Весовые коэффициенты зависят от расположения узлов и могут быть определены различными способами, например, с помощью интерполяционных многочленов. В этом случае весовые коэффициенты для узлов можно получить как производные базисных функций интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$k_{ij}^{(n)} = \frac{d^n L_j(x_i)}{dx_i^n},$$

Таким образом для решения дифференциального уравнения изгиба пластины методом дифференциальных квадратур необходимо дискретизировать область решения, аппроксимировать производные взвешенными суммами значений функции в узловых точках, аппроксимировать граничные условия и решить полученную систему алгебраических уравнений.

Область решения ДУ дискретизируется N точками, при этом выбор этих узловых точек оказывает существенное влияние на точность получаемого решения. Обычно при численном решении ДУ используют равномерную сетку. Однако, в случае МДК рекомендуется использовать нерегулярную сетку (например, Чебышёва), сгущенную к краям области пластины. Это связано с возможной осцилляцией решения на краях

рассматриваемой области. Узлы Чебышёва широко применяются в численных методах [12, 13], в том числе в МДК, благодаря своей способности существенно снижать погрешность интерполяции и делать вычисление более устойчивым.

В рамках проведенного исследования были составлены расчетные программы для решения задачи изгиба пластины методами Бубнова-Галёркина, МКЭ и МДК в системе компьютерной алгебры Maple и в среде PyCharm на языке программирования Python.

Далее приведены результаты расчета для плиты, закрепленной шарнирно по контуру, со следующими параметрами: длина пластины вдоль оси O_x $a = 6$ м; длина пластины вдоль оси O_y $b = 3$ м; толщина пластины $h = 0.12$ м; коэффициент Пуассона $\mu = 0.2$; модуль Юнга $E = 34.5 \cdot 10^9$ Па; равномерно распределенная нагрузка $q = 8 \cdot 10^3$ Па. Для моделирования шарнирного опирания пластины были выбраны координатные функции вида:

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

Для метода Бубнова-Галёркина использовано приближение, равное 5. Для методов конечных разностей (МКР) и метода дифференциальных квадратур (МДК) использовалось несколько вариантов сетки: 6×4 , 12×8 , 30×20 , для МДК рассматривались равномерные сетки (р/м с.) и сетки Чебышева (с. Чеб-ва). В таблице 1 представлены полученные результаты: $w(x, y)$ – прогиб в центре пластины, мм; M_x, M_y – изгибающие моменты вдоль осей x и y , Н·м/м; M_{xy} – крутящий момент, Н·м/м; Q_x, Q_y – поперечные силы, Н·м/м; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – нормальные и касательные напряжения, Па.

Таблица №1

Сравнение результатов расчета задачи изгиба пластины

Параметр	МБ-Г	МКР, 6x4	МДК, 6x4, р/м с.	МДК, 6x4, с. Цеб-ва	МКР, 12x8	МДК, 12x8, р/м с.	МДК, 12x8, с. Цеб-ва	МКР, 30x20	МДК, 30x20, р/м с.	МДК, 30x20, с. Цеб-ва
$w(x, y)$, мм	1,2696	1.2856	1.1377	1.1551	1.2728	1.2679	1.2683	1.2683	1.6783	1.2691
$M_x \cdot 10^3$ Н·м/м	2.7194	2.661	2.522	2.531	2.648	2.644	2.643	2.644	8.682	2.643
$M_y \cdot 10^3$ Н·м/м	7.2325	6.969	6.533	6.627	7.137	7.194	7.196	7.186	-30.101	7.196
$M_{xy} \cdot 10^3$ Н·м/м	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.552	0.000
$Q_x \cdot 10^3$ Н·м/м	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	21.601	0.000
$Q_y \cdot 10^3$ Н·м/м	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.387	0.000
$\sigma_x \cdot 10^6$ Па	1.1331	1.109	1.051	1.055	1.103	1.102	1.101	1.102	3.618	1.101
$\sigma_y \cdot 10^6$ Па	3.0135	2.904	2.722	2.761	2.974	2.997	2.998	2.994	-12.542	2.998
$\tau_{xy} \cdot 10^6$ Па	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.063	0.000

Метод Бубнова-Галёркина выступает в качестве эталонного решения, т. к. данный метод является полуаналитическим, и его результат можно считать наиболее точным для данной задачи. Заметно, что результаты метода конечных разностей приближаются к эталонному значению, однако метод дифференциальных квадратур делает это быстрее. В свою очередь МДК с равномерной сеткой на грубой сетке дает ошибочные значения. Использование сетки Чебышёва повышает точность метода: относительная погрешность составила 0.04%, в то время как у МКР это значение составило 0.10%.

Аналогичные результаты были получены при разных параметрах пластин и применяемых видов закреплений. Таким образом можно сделать следующие выводы:

1. Метод Бубнова-Галёркина является надежным источником результатов, которые можно использовать в качестве эталонных для оценки точности численных методов.

2. Метод конечных разностей является простым и быстрым методом расчета. Он уступает методу дифференциальных квадратур в скорости, с которой стремится к эталонному значению, однако его главное преимущество – низкая вычислительная стоимость, которая может сыграть решающую роль при выборе метода решения сложных инженерных задач.

3. Метод дифференциальных квадратур является наиболее точным из рассмотренных методов. Он сходится быстрее чем МКР на небольших по числу узлов сетках, а модификация с использованием сеток Чебышёва позволяет проводить расчет и при густых сетках.

Таким образом метод дифференциальных квадратур на сетке Чебышёва является эффективным методом решения задач на изгиб тонких прямоугольных пластин и позволяет получать результаты высокой точности при использовании ограниченного числа узлов.

Литература

1. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024. Т. 8, № 3. С. 23–33. DOI: 10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33.
2. Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н., Бердник Я.А. Расчёт на жёсткость пластины, подкреплённой рёбрами, на упругом основании методом Бубнова-Галёркина. *Инженерный вестник Дона*. 2016. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3699.
3. Барменкова Е.В. Применение метода конечных разностей к задачам изгиба прямоугольных плит на упругом основании. *Инженерный вестник Дона*. 2023. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2023/8487.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford. Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005. XIV. 733 p.
5. Зинкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Москва. Мир. 1986. 318 с.
6. Bert C.W., Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Reviews*. 1996. Vol. 49. No. 1. Pp. 1-28.
7. Shu C. Differential Quadrature and Its Application in Engineering. London. Springer. 2000. 340 p.
8. Zhu X.G., Nie Y.F., Yuan Z.B. Differential quadrature method for space-fractional diffusion equations on 2D irregular domains. *Applied Mathematics and Computation*. 2010. Vol. 217. No. 6. Pp. 2715-2728.
9. Al-Saif A.S.J., Al-Kanani M.J. Alternating Direction Implicit Formulation of the Differential Quadrature Method for Solving the Unsteady State Two-

Dimensional Convection-Diffusion Equation. General Mathematics Notes. 2011. Vol. 7. No. 1. Pp. 41-50.

10. Бакусов П.А., Каменев И.В. Анализ точности решения задачи деформирования плиты численно-аналитическими методами при его разложении в тригонометрический и полиномиальный ряды. Вестник гражданских инженеров. 2025. № 1(108). С. 43-52. DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-1-43-52.

11. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва. Мир. 1988. 352 с.

12. Катрич С.А. Вычислительные особенности минимизации погрешности аппроксимаций функций по чебышевским узлам интерполяции. Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. 2015. № 2. С. 10-16.

13. Барулина М.А. Применение обобщенного метода дифференциальных квадратур к решению двумерных задач механики. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 206-216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216.

References

1. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastukhov D.F., Pastukhov YU.F. Computational Mathematics and Information Technologies. 2024. Т. 8, № 3. Pp. 23–33. DOI: 10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33.

2. Kadomtseva E.E., Beskopyl'nyy A.N., Berdnik YA.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2016. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2016/3699.

3. Barmenkova E.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2023. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2023/8487.

4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. Oxford. Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005. XIV. 733 p.
5. Zinkevich O., Morgan K. Konechnyye elementy i approksimatsiya [Finite elements and approximation]. Moskva. Mir. 1986. 318 p.
6. Bert C.W., Malik M. Applied Mechanics Reviews. 1996. Vol. 49. No. 1. Pp. 1-28.
7. Shu C. Differential Quadrature and Its Application in Engineering. London. Springer. 2000. 340 p.
8. Zhu X.G., Nie Y.F., Yuan Z.B. Applied Mathematics and Computation. 2010. Vol. 217. No. 6. Pp. 2715-2728.
9. Al-Saif A.S.J., Al-Kanani M.J. General Mathematics Notes. 2011. Vol. 7. No. 1. Pp. 41-50.
10. Bakusov P.A., Kamenev I.V. Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. 2025. № 1(108). Pp. 43-52. DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-1-43-52.
11. Fletcher K. Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moskva. Mir. 1988. 352 p.
12. Katrich S.A. Vestnik Taganrogskego instituta imeni A. P. Chekhova. 2015. № 2. Pp. 10-16.
13. Barulina M.A. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018. T. 18, vyp. 2. Pp. 206-216. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-206-216.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 12.10.2025

Дата публикации: 27.11.2025