

Векторная дифракционная модель фокусировки гауссова лазерного пучка параболическим металлическим зеркалом

А.В. Боровский, М.В. Афонин

Байкальский государственный университет, г. Иркутск

Аннотация: В работе представлена векторная дифракционная модель фокусировки гауссова лазерного пучка с длиной волны 800 нм параболическим металлическим зеркалом диаметром 15 мм и фокусным расстоянием 150 мм. Модель основана на строгом расчёте отражённого электромагнитного поля с использованием базисов s- и p-поляризаций, комплексных коэффициентов Френеля и поверхностного интеграла Кирхгофа–Рэлея. В качестве материала отражающего покрытия задан комплексный показатель преломления $n=0.145+4.5i$, соответствующий серебру в ближнем ИК-диапазоне. Входной пучок задан с радиусом перетяжки 3 мм в плоскости вершины зеркала. Расчёт поля в фокальной плоскости выполнен численно на сетке 300×300 точек в области ± 30 мкм. В качестве критериев качества фокусировки использованы полная интенсивность, радиальное распределение интенсивности и полуширина фокального пятна по уровню половины максимума (Full Width at Half Maximum, далее FWHM). Получено фокальное пятно с $\text{FWHM} \approx 8,56$ мкм, что согласуется с теоретической оценкой для дифракционно-ограниченной системы. Показано, что учёт векторного характера поля и диссипативных свойств металла позволяет корректно оценить поляризационные искажения и потери в реальных зеркальных фокусирующих системах.

Ключевые слова: векторная дифракционная модель, параболическое металлическое зеркало, гауссов лазерный пучок, коэффициенты Френеля, комплексный показатель преломления.

В современной лазерной физике и оптике растёт интерес к строгому моделированию фокусировки излучения, особенно в системах с высокой числовой апертурой, где применимость классических скалярных приближений оказывается ограниченной. Основы теории дифракции были заложены Кирхгофом, предложившим интегральное представление скалярного поля на основе приближённых граничных условий [1], и развиты Зоммерфельдом, построившим первые строгие решения (например, для

дифракции на полуплоскости) в рамках волновой теории [2]. В дальнейшем математический аппарат, необходимый для обобщения подобных решений — включая теорию интегральных уравнений, функций Грина и методы решения краевых задач, был систематизирован в трудах Франка и Мизеса [3]. Зоммерфельд в своём курсе «Оптика» дал физически прозрачное изложение строгой теории дифракции и геометрической оптики [4], а Борн и Вольф завершили формирование современной электромагнитной теории оптических систем, детально проанализировав границы применимости скалярных моделей и необходимость векторного описания фокусированных полей [5].

Тем не менее данные труды были опубликованы до появления современных вычислительных средств, вследствие чего многие сложные задачи, требующие значительных вычислительных ресурсов, в то время оставались за пределами практического анализа.

В работе [6] заложены основы строгого описания электромагнитного поля в фокусе апланатической системы — поле выражается через интеграл по угловому спектру с учётом векторной природы света, данный подход ограничен линзовыми системами и не учитывает специфику отражения от криволинейных зеркальных поверхностей. В монографии [7] систематически изложены фундаментальные принципы нанооптики, включая векторное описание распространения и фокусировки света, но акцент сделан на диэлектрических компонентах и не рассматриваются особенности отражения от реальных металлических покрытий, а также геометрия параболических зеркал. В работе [8] показано, что линейно - поляризованные пучки способны формировать узкие продольные компоненты в фокусе, что открывает возможности для субволновой локализации поля. Тем не менее, исследование проведено для идеальных диэлектрических линз и не включает влияние отражательной оптики и комплексных оптических констант металлов.

Подход, представленный в [9], основан на геометрической теории дифракции, разработанной Зельдовичем и Мышкисом [10], и эффективен в высокочастотном пределе, однако он не обеспечивает достаточной точности в непосредственной окрестности фокуса, где доминируют интерференционные и дифракционные эффекты. В работе [11] предложено интегральное представление поля в фокальной области через угловой спектр, что стало теоретической основой для многих последующих моделей. Однако данная формулировка предполагает прохождение волны через преломляющую поверхность и не адаптирована для описания отражения от параболических зеркал. В работе [12] развита строгая теория электромагнитной дифракции в оптических системах, включая векторную формулировку. Тем не менее, модель разработана для прохождения света через апертуру в непрозрачном экране и не предусматривает явного учёта локальной геометрии отражающей поверхности и коэффициентов отражения, зависящих от угла. В работе [13] представлена векторная теория дифракции для электромагнитных волн на основе строгих интегральных соотношений, позволяющая описывать фокусировку с учётом поляризации электромагнитного излучения. Однако акцент сделан на обобщённые аналитические решения, а не на численное моделирование отражения от зеркальной поверхности. В работе [14] разработан метод расчёта векторной дифракции в оптических системах с учётом произвольной геометрии падения и поляризации. Подход применим к широкому классу задач, но не специализирован под параболические зеркала и не включает в явном виде расчёт локальных коэффициентов Френеля для металлических поверхностей. В работе [15] исследуется формирование сфокусированных векторных полей при использовании офсетного параболического зеркала. Авторы учитывают геометрию отражения и поляризационные преобразования, однако их модель

предполагает идеальное отражающее покрытие и не включает дисперсионные свойства реальных металлов.

В трудах [16, 17] рассмотрены теоретические основы фокусировки лазерного излучения линзовыми системами и параболическими зеркалами в рамках теории векторного потенциала. Однако, авторы ограничились рассмотрением идеального отражения от поверхности зеркала и вывели за пределы рассмотрения поляризационные эффекты, возникающие на искривленной поверхности зеркала. Теория гауссовых пучков рассмотрена в трудах [18, 19]. Гауссовы пучки как строгие решения параболического уравнения рассмотрены в [20, 17].

Таким образом, ни одна из рассмотренных работ не объединяет в себе одновременно строгое векторное описание, учёт реальных оптических свойств металлов, дискретное численное суммирование по отражающей поверхности и гибкость в задании геометрии параболического зеркала.

Настоящая работа посвящена разработке векторной дифракционной модели фокусировки гауссова лазерного пучка параболическим металлическим зеркалом, реализованной в виде открытого вычислительного алгоритма.

Модель позволяет количественно оценить, как интегральные характеристики фокального пятна — включая ширину по уровню половины максимума (Full Width at Half Maximum, далее FWHM) и общую интенсивность, — так и векторную структуру поля, обусловленную поляризационными искажениями при отражении от реального металла. Такой подход особенно важен для приложений в нелинейной и когерентной оптике, лазерной физике фемтосекундной длительности и высоких интенсивностей излучения, где точное знание распределения электромагнитного поля в фокусе критично для интерпретации экспериментальных данных.

Введём в рассмотрение следующие обозначения и параметры, используемые в модели фокусировки гауссова лазерного пучка параболическим металлическим зеркалом:

- $\lambda = 800$ нм — длина волны лазерного излучения,
- $D = 15$ мм — диаметр зеркала,
- $f = 150$ мм — фокусное расстояние,
- $w_0 = 3$ мм — поперечный размер гауссова пучка в плоскости вершины зеркала,
- $n_{metal} = 0.145 + 4.5i$ — комплексный показатель преломления металлического покрытия (серебро в ближнем ИК-диапазоне),
- $\alpha = 0^\circ$ — угол между волновым вектором падающей волны и осью Oz зеркала (нормальное падение),
- E_0 — амплитуда входного поля,
- $N_\rho = 120$, $N_\phi = 180$ — число узлов дискретизации поверхности зеркала в радиальном и азимутальном направлениях,
- $N_{obs} = 300$ — разрешение квадратной расчётной сетки в фокальной плоскости, т.е. число точек по каждой координате.
- Δz — смещение плоскости наблюдения вдоль оси Oz от геометрического фокуса,
- $L_{obs} = 30$ мкм — полуширина области наблюдения вдоль осей x и y .

Рассмотрим векторную дифракционную модель, в которой поле в фокальной плоскости определяется как результат строгого интегрирования отражённого электромагнитного поля по поверхности зеркала:

$$\mathbf{E}_{obs}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\lambda} \iint_S \mathbf{E}_{surf}(\mathbf{r}') \frac{\cos \theta(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (1)$$

где:

- $\mathbf{r} = (x, y, z_{obs})$ — точка в плоскости наблюдения,
- $\mathbf{r}' = (x_s, y_s, z_s)$ — точка на поверхности параболического зеркала $z_s = \frac{\rho^2}{4f}$,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,
- $\cos \theta = \mathbf{n} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ — косинус угла между нормалью к поверхности зеркала \mathbf{n} и направлением от точки испускания на точку наблюдения,
- \mathbf{E}_{surf} — отражённое поле на поверхности, вычисляемое с учётом векторной природы отражения и комплексных коэффициентов Френеля.

Падающее на зеркало поле задаётся как гауссов пучок с перетяжкой в $z = 0$:

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{\pi}} \cos(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \sigma} \cos(\varphi)$$

$$E_z = -\frac{E_0}{\sqrt{\pi}} \varepsilon \rho_x \cos^2(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \sigma} \sin(\varphi + \sigma)$$

Где:

$$\varphi = wt + kz + \sigma - \frac{1}{4}\rho^2 \sin(2\sigma)$$

$$\cos^2(\sigma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} ; \varepsilon = \frac{1}{k\rho_0} ; \sigma = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) ;$$

$$z_R = k\rho_0^2 ;$$

$$\rho = \frac{r}{\rho_0} ; r = (x \cos \mu, y \sin \mu)$$

(2)

где:

- z_R — длина Рэлея,
- $1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2$ — радиус кривизны волнового фронта (при $z=0 \rightarrow R=\infty$),
- $\sigma = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$ — фазовая добавка для гауссова пучка.
- Вершина зеркала находится в точке $z = -d$.

Поперечный размер пучка w_0 в плоскости вершины зеркала для компоненты поля находится из условия

$$\frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \sigma = \left(\frac{r}{w_0}\right)^2, \quad w_0 = \sqrt{2}\rho_0 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{z_R}\right)^2} \quad (3)$$

Отражённое поле E_{surf} вычисляется через разложение по локальным базисам s и p поляризаций:

$$\mathbf{E}_{surf} = r_s(\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{e}_s)\mathbf{e}_s + r_p(\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{e}_p)\mathbf{e}_p, \quad (4)$$

где r_s , r_p - комплексные коэффициенты Френеля для металла:

$$r_s = \frac{n_{inc}\cos\theta_i - n_{metal}\cos\theta_t}{n_{inc}\cos\theta_i + n_{metal}\cos\theta_t} \quad r_p = \frac{n_{metal}\cos\theta_i - n_{inc}\cos\theta_t}{n_{metal}\cos\theta_i + n_{inc}\cos\theta_t} \quad (5)$$

где:

- r_s — комплексный коэффициент Френеля для s-поляризации (электрическое поле перпендикулярно плоскости падения),
- r_p — комплексный коэффициент Френеля для p-поляризации (электрическое поле в плоскости падения),
- n_{inc} — показатель преломления падающей среды (для воздуха 1.0),
- n_{metal} — комплексный показатель преломления металла ($n_{metal} = n + ik = 0.145 + 4.5i$),
- θ_i — угол падения (между направлением пучка и нормалью к поверхности),
- θ_t — комплексный «угол преломления» в металле,
- $\cos\theta_t$ — вычисляется через главную ветвь комплексного квадратного корня.

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_{inc}}{n_{metal}}\sin\theta_i\right)^2}, \quad (6)$$

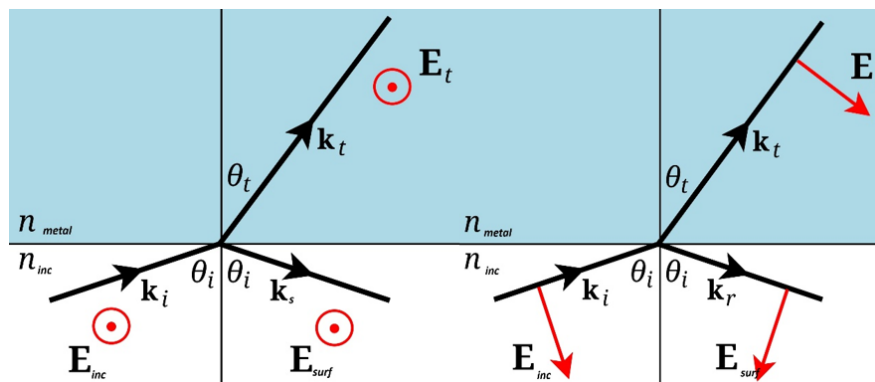


Рис. 1. Направление векторов S (слева) и P поляризации (справа)

Магнитное поле в модели присутствует через фундаментальную связь электрического и магнитного поля в свободном пространстве. Поэтому в расчётах фокусировки достаточно вычислить только компоненты электрического поля. Интенсивность излучения равна модулю вектора Пойнтинга, который в свою очередь равен усредненному по периоду колебания векторному произведению электрического и магнитного полей,

умноженному на числовой коэффициент. В гауссовой системе единиц измерений:

$$I = |S| = \frac{c}{4\pi} |\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle| = \frac{c}{8\pi} |E|^2 \quad (7)$$

в качестве критериев качества фокусировки используются:

- Функция: $I(x, y) = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$, пропорциональная интенсивности излучения,
- Нормированное радиальное распределение $I(r)$,
- Ширина на полувысоте интенсивности (FWHM) — диаметр области, где $I \geq I_{max}/2$,
- Отношение амплитуд компонент поля (например, $\frac{|E_y|_{max}}{|E_x|_{max}}$) как мера поляризационных искажений.

Численная реализация модели выполнена на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и Matplotlib. Интеграл (1) вычисляется методом прямоугольников по дискретной сетке на поверхности зеркала с параллелизацией через ThreadPoolExecutor.

В результате расчётов получено фокальное пятно с максимальной интенсивностью в центре и осесимметричным профилем поля и интенсивности. На рис.2 и 3 приведены распределения нормированной интенсивности в фокальной плоскости и сдвинутых плоскостях относительно фокальной точки $\Delta z = 25, 50, 100, 500$ мкм.

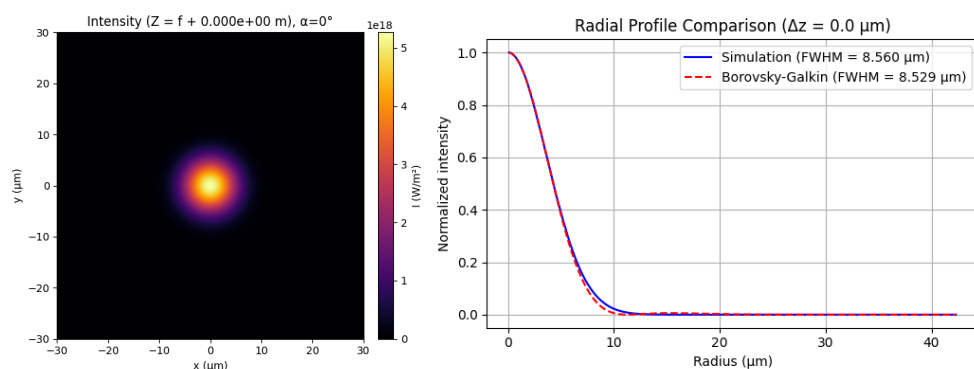


Рис. 2. Профиль интенсивности для симуляции (синяя сплошная) и сравнение с моделью Боровского-Галкина[16] (красный пунктир), $\Delta z = 0$

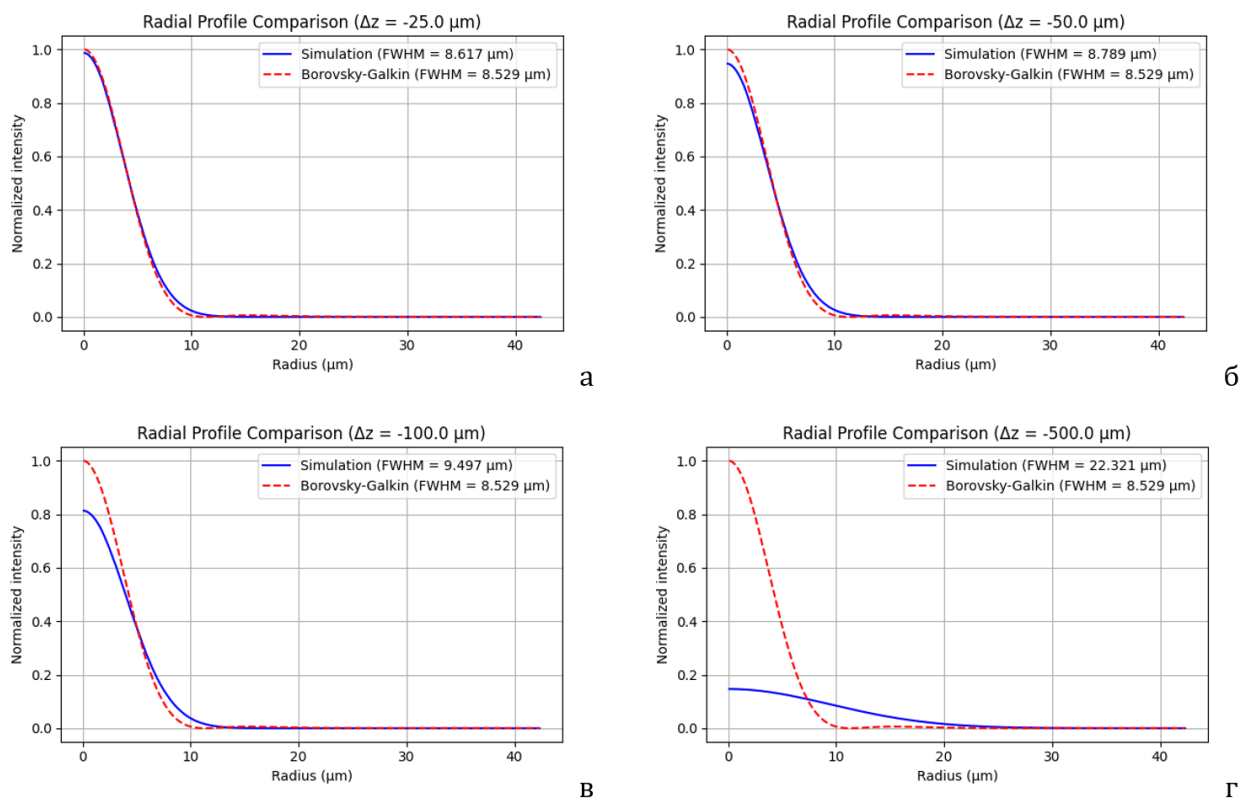


Рис. 3. Профиль интенсивности для симуляции (синяя сплошная) при разных Δz : а) 25 мкм б) 50 мкм в) 100 мкм г) 500 мкм, и сравнение с моделью Боровского-Галкина [16] (красный пунктир) при $\Delta z=0$.

Радиальное распределение интенсивности в фокальной плоскости (рис.2) сопоставлено с теоретическим гауссовым профилем (красный пунктир), полученным Боровским и Галкиным в рамках теории векторного потенциала в [16, 17], что свидетельствует о высокой точности расчёта и соответствии дифракционному пределу.

Анализ компонент поля показал:

- Основная компонента — E_x (вследствие линейной поляризации входного пучка),
- Амплитуда E_y мала: $\left| \frac{E_{y|max}}{E_{x|max}} \right| < 10^{-6}$,
- Продольная компонента E_z ненулевая, и составляет порядка 1 % от $|E_x|$, что типично для систем с умеренной числовой апертурой ($NA \approx 0.05$).

Разработанная модель фокусировки коллимированного лазерного пучка обеспечивает высокоточное воспроизведение поля в фокальной области с учётом векторных и диссипативных эффектов, связанных с реальными оптическими свойствами металлического покрытия. На рисунках 3(а–г) представлено распространение гауссова пучка вблизи фокуса оптической системы. Полученные результаты согласуются с предсказаниями гауссовой оптики; отклонения не наблюдаются вследствие малой оптической силы зеркала и параксиального характера фокусировки.

Заключение

В работе исследована задача фокусировки лазерного пучка параболическим зеркалом с металлическим покрытием. Сформулирована модель фокусировки для фокальной области параболического зеркала. Для расчета поля и интенсивности в фокальной области предложено использовать интеграл Кирхгофа (1), который является строгим решением волнового уравнения в пустом пространстве. Поле на зеркале задано в виде гауссова пучка, который является строгим аксиально симметричным решением параболического уравнения. Вид модели сформулирован в виде уравнений (2). На зеркале задано комплексное отражение Френеля (3-5), учитывающее поглощение и отражение излучения s и p поляризаций. Модель учитывает поляризационные эффекты, когда отраженный вектор электрического поля обладает тремя компонентами по осям x, y, z .

В работе проведена дискретизация предложенной непрерывной модели фокусировки лазерного излучения. Рассмотрены аксиально симметричная сетка на зеркале и квадратная на плоскости в фокальной области.

Тестирование модели проведено путем сравнения расчётов с аналитическим решением, полученным Боровским и Галкиным в трудах [16,

17] на основе теории векторного потенциала. Получено совпадение результатов.

В работе исследована пространственная структура излучения при фокусировке параболическим зеркалом с учётом векторных свойств электромагнитного поля и поглощения на зеркале. Расчёты показывают, что при типичных параметрах фокусировки в фокальной области радиусом 8–9 мкм достигаются пиковые интенсивности $\approx 10^{16}$ Вт/см², соответствующие началу сильной нелинейности и возможного плазмообразования. Это подтверждает необходимость учёта детальной пространственно-временной структуры поля при моделировании процессов взаимодействия фокусированного излучения с веществом. Для параксиальной фокусировки в целом работа подтверждает концепцию гауссовых пучков.

Литература

1. Kirchhoff G. Zur Theorie der Lichtstrahlen // Annalen der Physik. 1883. Bd. 18. S. 663.
 2. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction // Mathematische Annalen. 1896. Bd. 47. S. 317-374.
 3. Зоммерфельд А. Оптика. М.: ИЛ, 1953. 323 с.
 4. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1937. 849 с.
 5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 513 с.
 6. Richards B., Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1959. Vol. 253, № 1274. pp. 358–379.
 7. Novotny L., Hecht B. Principles of Nano-Optics. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 532 p.
-

8. Dorn R., Quabis S., Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 91, № 23. P. 233901.
9. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
10. Зельдович Б.Я., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972. 592 с.
11. Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. I. An integral representation // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1959. Vol. 251, № 1266. pp. 445-457.
12. Marathay A.S., McCalmont J.F. Vector diffraction theory for electromagnetic waves // *Journal of the Optical Society of America A*. 2001. Vol. 18, № 10. pp. 2585–2593.
13. Kim J., Wang Y., Zhang X. Calculation of vectorial diffraction in optical systems // *Journal of the Optical Society of America A*. 2018. Vol. 35, № 4. pp. 526–535.
14. Zeng X., Chen X. Characterization of tightly focused vector fields formed by an off-axis parabolic mirror // *Optics Express*. 2019. Vol. 27, № 2. pp. 1179–1198.
15. Kant R. Vector diffraction in paraboloidal mirrors with Seidel aberrations // *Optics Communications*. 1996. Vol. 124, № 1–2. pp. 61–68.
16. Боровский А.В., Галкин А.Л. Математическая модель волновой фокусировки лазерного излучения параболическим зеркалом // *Известия Байкальского государственного университета*. 2016. Т. 26, № 4. С. 645–651.
17. Боровский А.В., Галкин А.Л. Избранные задачи лазерной физики. Саарбрюккен: Palmarium Academic Publishing, 2016. 267 с.
18. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.
19. Ярив А. Квантовая электроника. М.: Советское радио, 1980. 487 с.
20. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1990. 440 с.

References

1. Kirchhoff G. Annalen der Physik. 1883. Bd. 18. P. 663.
 2. Sommerfeld A. Mathematische Annalen. 1896. Bd. 47. pp. 317–374.
 3. Zommerfel'd A. Optika [Optics]. Moskva: IL, 1953. P. 323.
 4. Frank F., Mizes R. Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoi fiziki [Differential and Integral Equations of Mathematical Physics]. Moskva: ONTI, 1937. P. 849.
 5. Born M., Vol'f E. Osnovy optiki [Principles of Optics]. Moskva: Nauka, 1973. P. 513.
 6. Richards B., Wolf E. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1959. Vol. 253, No. 1274. pp. 358–379.
 7. Novotny L., Hecht B. Principles of Nano-Optics. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. P. 532.
 8. Dorn R., Quabis S., Leuchs G. Physical Review Letters. 2003. Vol. 91, No. 23. P. 233901.
 9. Borovikov V.A., Kinber B.E. Geometricheskaya teoriya difraktsii [Geometrical Theory of Diffraction]. Moskva: Svyaz', 1978. P. 247.
 10. Zel'dovich B.Ya., Myshkis A.D. Elementy prikladnoi matematiki [Elements of Applied Mathematics]. Moskva: Nauka, 1972. P. 592.
 11. Wolf E. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1959. Vol. 251, No. 1266. pp. 445–457.
 12. Marathay A.S., McCalmont J.F. Journal of the Optical Society of America A. 2001. Vol. 18, No. 10. pp. 2585–2593.
 13. Kim J., Wang Y., Zhang X. Journal of the Optical Society of America A. 2018. Vol. 35, No. 4. pp. 526–535.
 14. Zeng X., Chen X. Optics Express. 2019. Vol. 27, No. 2. pp. 1179–1198.
 15. Kant R. Optics Communications. 1996. Vol. 124, No. 1–2. pp. 61–68.
 16. Borovskii A.V., Galkin A.L. Izvestiya Bajkal'skogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. T. 26, № 4. pp. 645–651.
-



17. Borovskii A.V., Galkin A.L. Izbrannye zadachi lazernoi fiziki [Selected Problems of Laser Physics]. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. P. 267.
18. Markuze D. Opticheskie volnovody [Optical Waveguides]. Moskva: Mir, 1974. P. 576.
19. Yariv A. Kvantovaya elektronika [Quantum Electronics]. Moskva: Sovetskoe radio, 1980. P. 487.
20. Vainshtein L.A. Elektromagnitnye volny [Electromagnetic Waves]. Moskva: Radio i svyaz', 1990. P. 440.

Дата поступления: 13.11.2025

Дата публикации: 25.12.2025