Инженерный вестник Дона, №12 (2025)
ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2025/10593

# Применение нечетких множеств распределений к анализу эффективности образовательной программы

*А.С. Климова, Н.К. Шайдуллина*

*Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань*

**Аннотация:** В работе обсуждается возможность применения нечетких множеств распределений для анализа результативности образовательного проекта. Нечеткие множества распределений представляют собой инструмент для описания субъективных вероятностных распределений. Они позволяют моделировать неопределенность и вариации в вероятностях, что важно для принятия решений в условиях неопределенности. Таким образом, такой подход расширяет возможности классических методов, учитывая субъективные оценки и нечеткость в данных при анализе вероятностных сценариев. Это множества, определенные на конечной совокупности объектов, таким образом, что сумма значений принадлежности равна 1. В работе кратко приводятся основные понятия, связанные с нечеткими множествами распределений и операциями над ними. Они могут быть применены к задаче анализа эффективности образовательной программы.
**Ключевые слова:** нечеткие множества распределений, вероятностное распределение, взвешенное распределение, дополнение, объединение и пересечение распределений, параметрические распределения, функция параметрического нечеткого множества распределений.

## Введение

Анализ эффективности образовательной программы является важным, поскольку он позволяет объективно оценить, насколько успешно обучающиеся усваивают знания и навыки, а также применяют их на практике. Такой анализ помогает выявить сильные и слабые стороны учебного процесса, что способствует постоянному улучшению качества образования и оптимизации ресурсов.

Рассматривая оценку или прогнозирование эффективности участников образовательного проекта, как задачу принятия решений, можно использовать концепцию нечетких множеств распределений [1-3]. В большинстве моделей принятия решений используются вероятностные распределения и взвешенные распределения для учета неопределенности и оценки различных вариантов и исходов. Нечеткие множества распределений позволяют представить в виде нечетких множеств субъективные вероятности и взвешенные распределения. В свою очередь, многие основные понятия и операции, которые применимы в теории нечетких множеств [4-7], могут быть расширены и применены к нечетким множествам распределений. В этой работе рассмотрены параметрические нечеткие множества распределений и возможность их применения к анализу эффективности образовательной программы.

Основные разделы статьи распределены следующим образом: в разделе 2 приводятся определение нечеткого множества распределений, некоторые операции над этими множествами. В разделе 3 описано их применение к оценке эффективности образовательной программы. Раздел 4 подводит итоги статьи.

## Нечеткие множества распределений и операции над ними

Пусть имеется некоторое конечное непустое множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $(n > 1)$.

Нечеткое множество распределения (fuzzy distribution set) [1,2] определяется функцией $d: X \to [0,1]$, заданной на множестве $X$, если для нее выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 1. \qquad (1)$$

Обозначим $d_i = d(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, тогда формула (1) может быть преобразована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 1 \qquad (2)$$

Функция $d$ рассматривается как функция принадлежности нечеткого множества, удовлетворяющая условию (1). Нечетким множеством распределения или просто распределением называется множество $D =$

$\{d_1, \dots, d_n\}$. Обычно элементы множества $X$ упорядочены, $X$ можно представить как вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$ и распределение как вектор $D = (d_1, \dots, d_n)$. Интерпретация функции $d$, удовлетворяющей (1), как функции принадлежности нечеткого множества специального вида, позволяет переносить на распределения многие понятия и операции нечетких множеств.

Если учитывать введенные обозначения, то распределение $D = (0.9, 0.1, 0, \dots, 0)$ будет обозначать : $d_1 = 0.9$, $d_2 = 0.1$, и $d_i = 0$ для $i = 3, \dots, n$.

За $\mathcal{D}_n$ принято считать совокупность всех нечетких множеств распределения, которые определены на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Дополнением нечеткого множества распределений [1, 2] называется функция $com: \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$, преобразующая распределение $D = (d_1, \dots, d_n)$ из $\mathcal{D}_n$ в распределение $C = com(D) = (c_1, \dots, c_n)$ удовлетворяющее следующему свойству

$$\text{если } d_i \le d_j, \text{то } c_i \ge c_j,$$

где $c_i = N(d_i)$, это отрицание элементов $d_i$, $i = 1, \dots, n$. Первоначально Ягер определил отрицание элементов распределения $D = (d_1, \dots, d_n)$ в результате обобщения на них операции отрицания (негатора) нечеткой логики $N(x) = 1 - x$, $x \in [0,1]$ как $N(d_i) = \frac{1-d_i}{n-1}$. Ясно, что (2) выполняется для $C = com(D) = (c_1, \dots, c_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} N(d_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-d_i}{n-1} = 1. \qquad (2)$$

В работах [5, 8] были предложены другие негаторы для нечетких множеств распределения. Однако для всех этих операций условие инволютивности отрицаний $N\big(N(d_i)\big) = d_i$ и дополнения нечетких множеств распределений

$com\big(com(D)\big) = D$, не выполнялись. Инволютивная операция отрицания распределений была предложена в [8]:

$$N(d_i\ ) = \frac{\max(D)+\min(D)-d_i}{n(\max(D)+\min(D))-1} = \frac{MD-d_i}{nMD-1},$$

где $\max(D) = \max\{d_1, \dots, d_n\}$, $\min(D) = \min\{d_1, \dots, d_n\}$ $MD = \max(D) + \min(D)$.

Пусть $S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ будет t-конормой [10-12], т.е. коммутативной, ассоциативной и монотонной функцией, которая удовлетворяет равенствам $S(p, 0) = S(0, p) = p$ для всех $p \in [0,1]$.

Функция $un: \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$, определенная, для всех множеств нечетких распределений $P = (p_1, \dots, p_n)$ и $Q = (q_1, \dots, q_n)$ в $\mathcal{D}_n$, следующей формулой:

$$un(P, Q) = R = (r_1, \dots, r_n),$$

где

$$r_i = DIS(p_i, q_i) = \frac{S(p_i, q_i)}{\sum_{i=1}^{n} S(p_i, q_i)}, i = 1, \dots, n,$$

называется объединением множеств нечетких распределений, основанных на t-конормах $S$, а функция $DIS(p_i, q_i) = \frac{S(p_i, q_i)}{\sum_{i=1}^{n} S(p_i, q_i)}$ называется дизъюнктором [1,2].

Для t-конормы $S(p, q) = p + q - pq$, получаем объединение:

$$DIS(p_i, q_i) = \frac{p_i + q_i - p_i q_i}{2 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i}.$$

Пусть $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ является t-нормой [8-10], т.е. коммутативной, ассоциативной и монотонной функцией, которая удовлетворяет равенствам $T(p, 1) = T(1, p) = p$ для всех $p \in [0,1]$.

Функция $int: \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n \to \mathcal{D}_n$, определенная следующим равенством [9, 10]:

$$int(P, Q) = R = (r_1, \dots, r_n),$$

называется пересечением множеств нечетких распределений, основанном на t-норме $T$. Следующая функция называется конъюнктором [1,2]:

$$r_i = CON(p_i, q_i) = \begin{cases} \frac{1}{n}, if\ T(p_i, q_i) = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n, \\ \frac{T(p_i, q_i)}{\sum_{i=1}^{n} T(p, q_i)} \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2)$$

**Анализ эффективности образовательной программы с помощью множеств нечетких распределений**

Предположим, что требуется оценить качество некоторой образовательной программы, которая представляет собой распределенную структуру, состоящую из учебных групп, преподавателей и экспертов. Организационная структура данного проекта показана на рис.1.


Рис. 1. – Организационная структура проекта

Пусть имеются оценки эффективности образовательной программы по учебным группам, полученные по сформулированным критериям (например, среднее количество выполненных модулей, количество контрольных точек с удовлетворительными оценками, сохранность контингента, количество выданных сертификатов и т.д.), которые основаны на эталонных показателях. Значения этих показателей установлены экспертами.

Допустим, что мы можем представить эти оценки как субъективные распределения вероятностей, определенные на множестве: $X$ = {1, 2, 3 4, 5}, где 1 означает эффективность в интервале 0 – 19%, 2 – в интервале 20 – 39%, 3 – в интервале 40 – 59%, 4 – в интервале 60 – 79% и 5 означает эффективность 80 – 100%. Пусть эти распределения заданы для Учебной группы 1:

$W_1$ = (0.1, 0.1, **0.3, 0.3,** 0.2)

и для Учебной группы 2 как:

$W_2$ = (0.2, 0.2, **0.3**, 0.2, 0.1).

Используя формулу (2) с операциями минимума и произведения в качестве нечеткой конъюнкции, мы получим пересечения этих распределений, как возможные значения эффективности.

Если использовать t-норму $T_M$, то получим:

$int_M(W_1, W_2)$ = (0.1250, 0.1250, 0**.3750, 0.2500**, 0.1250), т.е., $p(3)$ = 0.3750, $p(4)$ = 0.2500, и $p(k)$ = 0.1250, для $k$ =1, 2, 5.

Если использовать t-норму $T_P$, то получим:

$int_P(W_1, W_2)$ = (0.0952, 0.0952, **0.4286**, **0.285**, 0.0952), т.е., $p(3)$ = 0.4286, $p(4)$ = 0.285, и $p(k) < 0.1$, для $k$ =1, 2, 5.

Обе модели дают 40-59% как наиболее вероятную эффективность для обеих t-норм, используемых в модели.

Оценка эффективности образовательного проекта с использованием операции дизъюнкции дает следующие результаты для t-конорм максимум $S_M$ и вероятностная сумма $S_P$:

$un_M(W_1, W_2)$ = (0.1667, 0.1667, **0.2500, 0.2500**, 0.1667),

$un_P(W_1, W_2)$ = (0.1564, 0.1564, **0.2849, 0.2458**, 0.1564), Эти распределения определены на множестве:

$X = \{1, 2, 3\ 4, 5\}$.

Здесь, так же как и в предыдущем случае, все элементы этой области имеют ненулевые вероятности с локальными максимумами для 3 и 4, соответствующие первоначальным субъективным распределениям. В случае максимума эффективности 3 и 4 равновероятны, а в случае вероятностной суммы, как и в предыдущем случае, эффективность 3 является наиболее вероятной.

Подобные методы могут быть применены для объединения субъективно определенных весовых распределений. Такого рода распределения используются в процессах принятия решений, задействующих множество критериев. Использование этих методов позволяет учитывать индивидуальные оценки и предпочтения, что особенно важно при разработке решений в многоличностных, многокритериальных и многозадачных ситуациях. Таким образом расширение возможностей агрегирования субъективных весовых распределений способствует повышению качества и обоснованности принимаемых решений в сложных многокомпонентных системах.

## Заключение

В статье приводится определение понятия множества нечетких распределений. Рассмотрены основные операции над множествами нечетких распределений, а также предложено применение концепции множеств нечетких распределений к задаче анализа эффективности образовательной программы. В планируемых исследованиях предполагается рассмотреть параметрические множества распределений, как результат расширения параметрических нечетких функций принадлежности этих множеств [3], для критериев анализа эффективности образовательного проекта. Также представляется возможным расширить понятие процедуры нечеткого вывода. Данный подход даст возможность повысить точность и адаптивность моделей, позволяющих обеспечить учет сложных взаимосвязей и вариаций в параметрических нечетких распределениях, что улучшит качество принятия решений.

## Литература

1. Батыршин И.З. Нечеткие множества распределений и их приложения в аналитике данных // XII Международная научно-практическая конференция «Интегрированные Модели и Мягкие Вычисления в Искусственном Интеллекте. Сборник научных трудов. Коломна. 2024. Том 1. С. 12-21.

2. Batyrshin I. Fuzzy Distribution Sets. Computación y Sistemas. México. 2022. Vol. 26. № 3. pp. 1411–1416.

3. Batyrshin I. Z., Klimova A.S., Rudas I. J. Parametric Fuzzy Distribution Sets. IEEE 27-th International Conference on Intelligent Engineering Systems. 2023. pp. 205-208.

4. Yager R. R. On the maximum entropy negation of a probability distribution. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2014. Vol. 23. № 5. pp. 1899–1902.

5. Batyrshin I. Z., Kubysheva N. I., Bayrasheva V. R., Kosheleva O., Kreinovich V. Negations of Probability Distributions: A Survey. Computación y Sistemas. México. 2021. Vol. 25. № 4. pp. 775–781.

6. Грищенко А.А. Нечеткие методы принятия решений поиска объектов на море // Инженерный вестник Дона, 2014, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2287.

7. Гинис Л.А. Развитие инструментария когнитивного моделирования для исследования сложных систем // Инженерный вестник Дона, 2013, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1806.

8. Batyrshin I., Villa-Vargas L. A., Ramirez-Salinas M. A., Salinas-Rosales M., Kubysheva N. Generating negations of probability distributions. Soft Computing. 2021. Vol. 25. № 12. pp. 7929–7935.

9. Batyrshin I. Z. Contracting and involutive negations of probability distributions. Mathematics. 2021. Vol. 9. № 19. pp. 1–11.

10. Klir G. J., Yuan B. (Eds.). Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh. World Scientific. 1996. Vol. 6. 826 p.

11. Klement E. P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. In Trends in Logic. Dordrecht. Springer. 2000. 385 p.

12. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I. Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. Vol. 10. № 5. pp. 678–683.

## References

1. 1. Baty`rshin I.Z. XII Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferenciya «Integrirovanny`e Modeli i Myagkie Vy`chisleniya v Iskusstvennom Intellekte». Kolomna. 2024. Vol. 1. Pp. 12-21.

2. Batyrshin I. Computación y Sistemas. México. 2022. Vol. 26. № 3. Pp. 1411–1416.

3. Batyrshin I. Z., Klimova A.S., Rudas I. J. IEEE 27th International Conference on Intelligent Engineering Systems. 2023. Pp. 205-208.

4. Yager R. R. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2014. Vol. 23. № 5. Pp. 1899–1902.

5. Batyrshin I. Z., Kubysheva N. I., Bayrasheva V. R., Kosheleva O., Kreinovich V. Computación y Sistemas. México. 2021. Vol. 25. № 4. Pp. 775–781.

6. Grishhenko A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2287.

7. Ginis L.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №3. URL: http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1806.

8. Batyrshin I., Villa-Vargas L. A., Ramirez-Salinas M. A., Salinas-Rosales M., Kubysheva N. Soft Computing. 2021. Vol. 25. № 12. Pp. 7929–7935.

9. Batyrshin I. Z. Mathematics. 2021. Vol. 9. № 19. Pp. 1–11.

10. Klir G. J., Yuan B. Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh. World Scientific. 1996. Vol. 6. 826 p.

11. Klement E. P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. In Trends in Logic. Dordrecht. Springer. 2000. 385 p.

12. Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. Vol. 10. № 5. Pp. 678–683.

**Дата поступления: 18.10.2025**

**Дата публикации: 27.11.2025**