



Определение предельного давления на толстостенную трубу, подкрепленную изнутри трубой металлической

E.E. Евдокимов, Л.М. Арзамаскова, О.В. Коновалов, В.И. Клименко

Волгоградский государственный технический университет

Аннотация: Рассмотрена задача о предельном внешнем давлении на толстостенную бетонную трубу, подкрепленную изнутри металлической трубой. Задача решена в предположении плоской деформации. Исследовано напряженное состояние в бетонном массиве и по поверхности контакта металлической трубы с бетоном, при условии, что бетон находится в предельном состоянии. Получен закон изменения напряженного состояния в бетонном массиве и трансцендентное уравнение для определения предельного давления по наружной поверхности бетонной обоймы. Определена предельная равномерно распределенная нагрузка, действующая по наружной поверхности бетонной обоймы, внутри которой помещена металлическая труба.

Ключевые слова: деформативность бетона, критерий прочности, предельное состояние равновесия, напряженное состояние в бетонном массиве, предельное давление.

Интенсивные исследования в области деформативности и прочности бетона, проведенные за последние годы, объясняются стремлением создать теории, которые наиболее точно учитывают физические особенности процессов, происходящих в материале в результате воздействия силовых факторов [1-3].

Разнообразие применяемых видов арматуры, расширение диапазона применяемых марок бетона, облегчение конструкций за счет применения тонкостенных элементов, разнообразие во внешних воздействиях на сооружение – все это требует развития методов расчета напряженного состояния бетона, а не только расчета стадии разрушения [4, 5]. Создание теории деформации и прочности бетона необходимо не только для усовершенствования расчета сооружений, но и для оценки их эксплуатационного состояния [6]. Все это невозможно без использования достаточно точного критерия прочности, учитывающего основные свойства бетона, и согласующегося с экспериментальными данными при сложном напряженном состоянии [7].

По известным экспериментальным данным бетон обладает рядом специфических особенностей [8]. В частности, при двухосном сжатии наблюдается определенное повышение предела прочности. Деформативность бетона меняется в широких пределах в зависимости от вида напряженного состояния. В случае всестороннего неравномерного сжатия бетон приобретает способность претерпеть значительные пластические деформации [9]. Таким образом, задача исследования напряженно-деформированного состояния бетонных элементов, находящихся в сложном напряженном состоянии, значительно усложняется.

Рассмотрим задачу о предельном внешнем давлении на толстостенную бетонную трубу, подкрепленную изнутри металлической трубой (рис.1). Требуется определить предельную равномерно распределенную нагрузку q , действующей по наружной поверхности бетонной обоймы, внутри которой помещена металлическая труба. Аналогичная задача имеет место при эксплуатации глубинной скважины, представляющей собой обсадную металлическую трубу, вокруг которой нагнетается бетонный раствор. На наружную поверхность раствора действует горное давление.

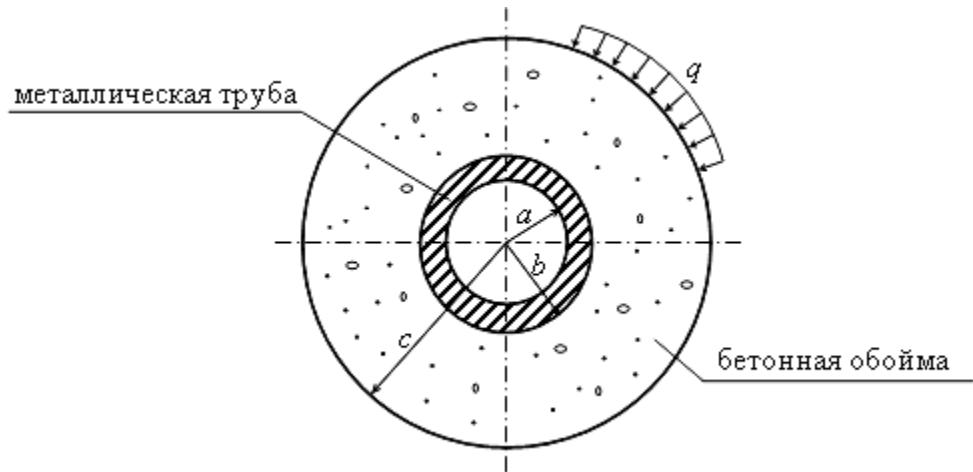


Рис. 1

Будем считать, что материал металлической трубы пластичен и при малых деформациях не обладает упрочнением. В таком случае существуют

некоторое максимальное значение нагрузки, при котором металлическая труба находится в предельном состоянии равновесия. При этом на поверхности контакта трубы и бетона будут действовать нормальные напряжения [10]:

$$-\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_T \cdot \ln \frac{a}{b}, \quad (1)$$

где σ_T – предел текучести материала; a и b – внутренний и наружный радиусы металлической трубы соответственно.

В качестве условия пластичности бетона применяется следующее значение:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) - (R_c - R_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_c \cdot R_p, \quad (2)$$

где R_c – предел прочности бетона при одноосном сжатии; R_p – предел прочности бетона при одноосном растяжении.

Получим решение, при котором и бетон и металл находятся в предельном состоянии. Задача решается в предположении плоской деформации.

Вводя потенциал пластичности, совпадающий с условием (2), можно получить выражение для деформаций, в частности:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{3G} \cdot \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_\theta) \right] - \frac{1}{2}(R_i + R_\theta), \quad (3)$$

где G – коэффициент пропорциональности.

Полагая в (3) $\varepsilon_z = 0$, находим

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{R_c - R_p}{2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) получим соотношение между главными напряжениями σ_1 и σ_2 , являющееся условием пластичности для плоского деформированного состояния бетона:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 2 \cdot (R_c - R_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{3}(R_c - R_p)^2 = 0. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение следующие параметры напряженного состояния:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (6)$$

а также характеристики прочности бетона:

$$S = \frac{R_c + R_p}{2}, \quad T = \frac{R_c - R_p}{2}.$$

При этом условие пластиичности (5) запишется:

$$t^2 - 2 \cdot T \cdot p - \frac{S^2}{3} = 0. \quad (7)$$

Из соотношения (6) и условия (7) следует:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 = p + t \\ \sigma_2 = p - t \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{t^2}{2t} + t - \frac{S^2}{G \cdot t} \\ \sigma_2 = \frac{t^2}{2t} - t - \frac{S^2}{G \cdot t} \end{array} \right\}. \quad (8)$$

При осевой симметрии дифференциальное уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (9)$$

В нашем случае активным давлением на бетонную стену является наружное, т.е. $U_\theta = 0$, где U_θ – перемещение точки $r = b$, при этом $\sigma_\theta = \sigma_1$, $\sigma_r = \sigma_2$ – соответственно большее и меньшее главные напряжения.

Подставляя (8) в дифференциальное уравнение равновесия (9) найдем:

$$\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{t} \right) dt - 2 \frac{dr}{r} = 0. \quad (10)$$

Интегрируя (10), получим выражение, определяющее закон изменения напряженного состояния в бетонном массиве:

$$\left(\frac{t}{c} \right)^2 = \frac{t_c}{t} \cdot \exp \left(\frac{t - t_c}{T} \right), \quad (11)$$

где c – радиус бетонной обоймы.

Граничное условие на наружной поверхности бетонной трубы определяет t_c : при $r = c$, $t = t_c$, $\sigma_r = \sigma_2 = q$ и по (8) имеет:

$$t_c = T + \sqrt{T^2 + \frac{S^2}{3} + 2 \cdot T \cdot q}. \quad (12)$$

Приравнивая нормальные напряжения по поверхности контакта бетона и металлической трубы, получим по (1) и (8):

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_T \cdot \ln \frac{a}{b} = \frac{t^2}{2T_0} - t - \frac{S^2}{G \cdot T}. \quad (13)$$

По (13) определяется значение параметра $t = t_e$ для точек, расположенных на внутренней поверхности бетонной трубы:

$$t_e = T + \sqrt{T^2 + \frac{S^2}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot T \cdot \sigma_T \cdot \ln \frac{a}{b}}. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (14) в (11) при $r = b$, получим трансцендентное уравнение для определения предельного давления q по наружной поверхности бетонной обоймы:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{t_c}{t_b} \cdot \exp\left(\frac{t_b - t_c}{T}\right).$$

Возможен случай, когда металл находится в упругом состоянии, а «пластическая» зона в бетоне, образуясь первоначально у наружной поверхности обоймы, распространяется и охватывает все сечение бетона. Если продолжать нагружение, то в предельное состояние перейдут оба материала, т.е. будут действовать условия рассмотренного выше случая.

Однако представляет определенный интерес определение величины наружного давления, при котором «пластическая» зона в бетоне впервые достигает внутренней поверхности обоймы. Условие пластичности бетона остается прежним (5). Совместность деформаций по поверхности контакта бетона с трубой можно записать в виде:

$$U_1 = U_2, \quad (15)$$

где U_1 , U_2 – радиальные перемещения по поверхности стали и бетона соответственно.

Упругое решение дает:

$$U_1 = \frac{1 + \nu_1}{E_1 \cdot (b^2 - a^2)} \cdot \left[a^2 \cdot b^2 \cdot (q_1 - q_2) \cdot \frac{1}{r} + (1 + 2\nu_1) \cdot (a^2 \cdot q_1 - b^2 \cdot q_2) \cdot r \right],$$

где q_1 , q_2 – давление на внутренней и внешней поверхностях; ν_1 – коэффициент Пуассона для стали; E_1 – модуль упругости стали.

При $q_1 = 0$, $q_2 = \sigma_r = \sigma_2$ и $r = b$ имеем:

$$-U_1 = \frac{(1 + \nu_1) \cdot \sigma_2}{E_1 \cdot (b^2 - a^2)} \cdot [a^2 \cdot b^2 + (1 + 2\nu_1) \cdot b^3]. \quad (16)$$

Перемещения в бетоне находим на основании результатов [11] при $r = b$, в виде:

$$-U_2 = \frac{b}{E(T)} \cdot [\sigma_\theta - \nu_2 \cdot (\sigma_r - \sigma_z)], \quad (17)$$

где $E(T)$ – секущий модуль.

В предельном состоянии $E(T) = \frac{1}{2} E_2^0$ (E_2^0 – начальный модуль упругости бетона). Для случая плоской деформации уравнение (17) примет вид:

$$-U_2 = \frac{2b \cdot (1 + \nu_2)}{E_2^0} \cdot [\sigma_1 - \nu_2 \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)]. \quad (18)$$

Подставив (16) и (18) в (15), будем иметь:

$$\frac{(1 + \nu_1) \cdot \sigma_2}{E_1 \cdot (b^2 - a^2)} \cdot [a^2 \cdot b^2 + (1 + 2\nu_1) \cdot b^3] - \frac{2b \cdot (1 + \nu_2)}{E_2^0} \cdot [\sigma_1 - \nu_2 \cdot (\sigma_2 + \sigma_1)] = 0. \quad (19)$$

Решая совместно (19) и (5), определим главные напряжения σ_1 и σ_2 , действующие по поверхности контакта трубы с бетоном, при условии, что последний находится в предельном состоянии.

Построение дальнейшего решения для определения внешнего давления q аналогично решению, рассмотренному выше. Необходимо при этом формулу (1) заменить выражением для σ_2 , полученным из решения уравнений (19) и (5).



Литература

1. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
2. Осетинский Ю.В., Подвальный А.М. О выборе модели для расчета собственных напряжений в бетоне // Механика композитных материалов. — 1982. №5. — С.789-795.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
4. Han L.H., Bjorhovde R. Developments and advanced applications of concrete filled steel tubular (CFST) structures // Journal of Constructional Steel Research. 2014. №100. pp. 211-228.
5. Wang X., Li J., Huang L., Xie W., Chen Z. Mechanical behavior of spiral reinforcement recycled aggregate concrete round columns under axial compression after spraying water at high temperatures // Front. Mater, 16 December 2022 Sec. Structural Materials Volume 9 2022. DOI: 10.3389/fmats.2022.1056620.
6. Зайцев Ю.В., Сахи Д.М., Пирадов К.А. Механика разрушения бетонов различной структуры. М., Издательство МГОУ. 2002, 226 с.
7. Давиденко А. А., Давиденко А. И. К обоснованию критерия прочности бетона при двухосном сжатии // Бетон и железобетон. – 2024. – № 3(622). – С. 13-19.
- 8 Цветков К.А. Прочность бетона при динамическом нагружении в условиях одноосного и двухосного сжатия // Инженерный вестник Дона. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9757.
9. Клименко В.И., Арзамаскова Л.М., Евдокимов Е.Е., Коновалов О.В. Расчет бетонных элементов в условиях неравномерного всестороннего сжатия // Инженерный вестник Дона. 2024. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9158.



10. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Издательство «Высшая школа», 1963. 512 с.

11. Гениев Г.А. Вариант деформированной теории пластичности бетона // Бетон и железобетон, 1969. №2. С. 22–26.

References

1. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. M.: Strojizdat, 1974. 316 p.
2. Osetinskiy Yu.V., Podval'nyy A.M. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1982. №5. pp. 785-795.
3. Karpenko N.I. Obshchie modeli mekhaniki zhelezobetona [General models of reinforced concrete mechanics]. M.: Strojizdat, 1996. 416 p.
4. Han L.H., Bjorhovde R. Journal of Constructional Steel Research. 2014. №100. pp. 211-228.
5. Wang X., Li J., Huang L., Xie W., Chen Z. Front. Mater, 16 December 2022 Sec. Structural Materials Volume 9. 2022. DOI: 10.3389/fmats.2022.1056620.
6. Zaytsev Yu.V., Sakhi D.M., Piradov K.A. Mekhanika razrusheniya betonov razlichnoy struktury [Fracture mechanics of concrete of different structures]. M.: MGOY, 2002. 226 p.
7. Davydenkov A.A., Davydenkov A.I. Beton i zhelezobeton, 2024. №3(622). pp. 13-19.
8. Tsvetkov K.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. № 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9757.
9. Klimenko V.I., Arzamaskova L.M., Evdokimov E.E., Konovalov O.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9158.



10. Bezukhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchestii [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Izdatel'stvo «Vysshaya shkola», 1963. 512 p.
11. Geniev G.A. Beton i zhelezobeton, 1969. №2. pp. 22–26.

Дата поступления: 15.11.2025

Дата публикации: 26.12.2025