

Индукционные свойства проводящего цилиндра с азимутальной напряжённостью вихревого электрического поля

В.Г. Сапогин, Н.Н. Прокопенко, В.И. Марчук, А.С. Будяков

Введение

Современные планарные технологии создания индуктивностей или трансформаторов в частотном диапазоне до 10 ГГц используют геометрию квадрата, либо октаэдра [1-5]. Но технология многоугольников обладает одним существенным недостатком: при скачкообразном изменении ориентации токопровода в пространстве скин-эффект создаёт благоприятные условия для выбрасывания электрического заряда на подложку. Применение кольцевой геометрии должно ослабить выбрасывание электрического заряда на подложку и тем самым позволит увеличить на указанных частотах, как параметр добротности, так и коэффициент передачи трансформаторов.

Известные методы расчёта индуктивностей [6] в микрометровом диапазоне геометрических размеров могут приводить к отрицательным значениям индуктивности. Этот недостаток геометрической теории потребовал создания принципиально новых электродинамических физико-математических моделей, которые ориентированы на потребности планарной микросхемотехники.

В [7-10] был найден подход к решению задач кольцевой геометрии, в основе которого лежит закон Био-Савара-Лапласа, либо уравнения магнитостатики. Полученные там результаты дают неплохое совпадение с экспериментальными данными и могут быть применимы для частот переменного тока, при которых отсутствует фазовый сдвиг между током и потоком.

Ниже излагается оригинальный подход к решению задач цилиндрической геометрии, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг. Подход объединяет в себе

возможности двух- и трёхмерных задач и не ограничивает возможный диапазон изменения частоты переменного тока.

Математическая модель расчёта

Математическая модель расчёта построена на решении первого уравнения Максвелла для цилиндрической симметрии исследуемых электромагнитных полей. В простейшей постановке задачи переменное однородное аксиальное магнитное поле формирует поток через цилиндр, при котором возникающее вихревое электрическое поле имеет одну азимутальную компоненту.

Тогда, внешнее магнитное поле имеет одну единственную компоненту $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Его зависимость во времени имеет вид

$$B_z = B_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где $B_0 = \text{const}$ не зависит от координат системы и в расчётах ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра R .

На рис. 1 представлена ориентация проводящего цилиндра по отношению к направлению поля B_z . Радиус отверстия цилиндра обозначен через r_1 , а произвольная толщина цилиндра обозначена через h .

Магнитное поле, имеющее одну компоненту B_z , порождает в цилиндре вихревое электрическое поле, напряженность которого $\vec{E} = (0, E_\varphi, 0)$ также имеет одну компоненту в случае, если вектор индукции \vec{B} направлен точно по оси z .

Распределение вихревого электрического поля в пространстве кольца описывается первым уравнением Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

Переписанное в проекциях для полей B_z и E_φ , оно имеет вид

$$(\text{rot} \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (3)$$

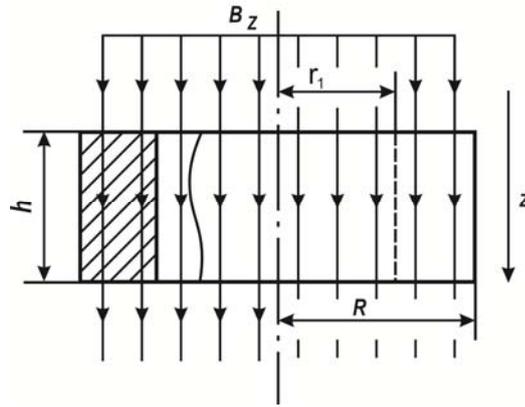


Рис. 1. Ориентация проводящего цилиндра по отношению к осевому магнитному полю

Предполагая, что вихревое электрическое поле совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_{\varphi} = E_0(r) \sin \omega t, \quad (4)$$

из уравнения (3) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_0) = \omega B_0. \quad (5)$$

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (6)$$

В решении (6) избавимся от особенности при $r \rightarrow 0$, полагая $C_1=0$. Из (6) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi \nu B_0 R. \quad (7)$$

Распределение вихревого поля в однородном проводящем цилиндре создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве и рассчитывается из локального закона Ома

$$j_{\varphi} = E_{\varphi} / \rho, \quad (8)$$

где ρ – удельное сопротивление цилиндра.

Из (8) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = const$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_{φ}

$$j_{\phi} = j_0(r) \sin \omega t, \quad (9)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi \nu B_0 R / \rho \quad (10)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (11)$$

Из соотношения (10) для масштаба плотности тока видно, что при прочих равных условиях он может достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления ρ . Это будет приводить к существенному нагреву проводящих цилиндров на высоких частотах.

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_{\phi}^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (12)$$

$$\text{где } p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 \nu^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (13)$$

– масштаб объемной плотности тепловой мощности.

Как видно из (13), масштаб плотности уже пропорционален квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе цилиндра. Это будет приводить к выгоранию его внешней боковой поверхности.

Поскольку напряженность вихревого поля E_{ϕ} зависит линейно от радиуса, то элементарная электродвижущая сила (ЭДС) индукции также будет зависеть от радиуса и момента времени. Направления векторов напряжённости и плотности тока на силовой линии представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что элементарная индукция квадратично зависит от радиуса

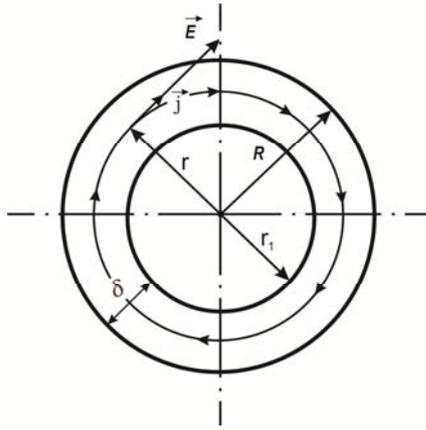


Рис. 2. Направление векторов напряжённости и плотности тока в цилиндре

$$d\varepsilon = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_\varphi r d\varphi = \frac{E_* r^2 d\varphi}{R} \sin \omega t. \quad (14)$$

В (14) учтено, что вектор $d\vec{l}$ совпадает с вектором \vec{E} .

На одной замкнутой силовой линии вихревого поля электродвижущая сила индукции зависит от ее радиуса

$$\varepsilon(r, t) = \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t, \quad (15)$$

$$\text{где } \varepsilon_* = 2\pi R E_* \quad (16)$$

– масштаб электродвижущей силы индукции.

Усредненное по радиусу значение ЭДС сохраняет ту же зависимость от времени

$$\langle \varepsilon \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t dr = \frac{\varepsilon_*}{3} \left(1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_1^2}{R^2} \right) \sin \omega t \quad (17)$$

Полный ток, индуцированный в кольце и пересекающий площадь поперечного сечения $ds = dh dr$, может быть получен из интегрирования для фиксированного момента времени

$$i = \int_s \vec{j} d\vec{s} = i_* \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right) \sin \omega t, \quad (18)$$

$$\text{где } i_* = j_* h R / 2 = \pi \nu B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (19)$$

– масштаб индукционного тока.

Соотношения (18) и (19) позволяют определить независящее от времени усредненное значение интегрального омического сопротивления цилиндра индукционному току

$$\langle R \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle_r}{i} = R_* \frac{(1 + r_1 / R + r_1^2 / R^2)}{(1 - r_1^2 / R^2)}, \quad (20)$$

где $R_* = \varepsilon_* / (3i_*)$ (21)

– масштаб омического сопротивления цилиндра.

На рис. 3 представлен график зависимости приведенного омического сопротивления $\langle R \rangle / R_*$ от приведенного радиуса полости r_1 / R . Из него видно, что приведенное усредненное значение омического сопротивления при $r_1 \rightarrow 0$ совпадает с единицей, а для тонких цилиндров при $r_1 / R \rightarrow 1$ стремится к $+\infty$.

Это свойство усредненного интегрального омического сопротивления позволит при реализации тонких цилиндров искусственно уменьшать тепловое энерговыделение проводника на высоких частотах изменением приведённого радиуса полости.

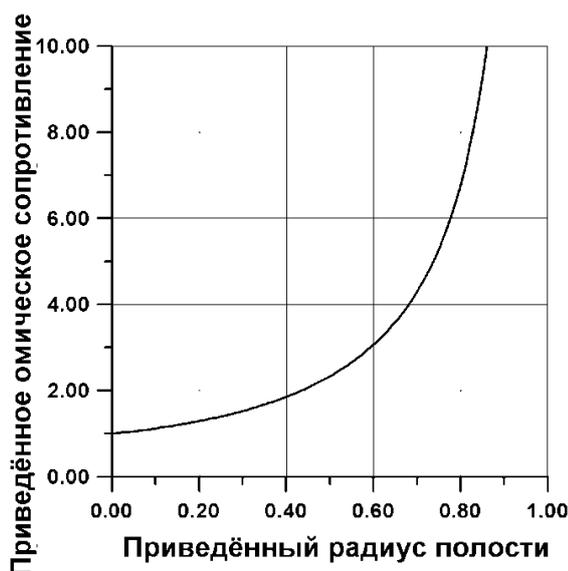


Рис 3. Зависимость приведённого омического сопротивления от приведённого радиуса полости цилиндра

Вносимая индуктивность цилиндра

Рассчитаем значение вносимой индуктивности из энергетических соображений. Силовые линии магнитного поля B_z пронизывают весь объем цилиндра и вносят в него магнитную энергию W , значение которой зависит от времени

$$W(\vec{r}, t) = \int_V \frac{B_z^2}{2\mu_0} dV. \quad (22)$$

При усреднении за период изменения поля эта энергия имеет конечное значение:

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \int_V \frac{B_0^2 dV}{2\mu_0} = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0}. \quad (23)$$

Поскольку эта же энергия магнитного поля создает вихревое электрическое поле, которое формирует индукционный ток, будем считать, что усредненное значение магнитной энергии (23) совпадает с усредненным за период значением энергии, запасенной индуктивностью

$$\langle W \rangle_T = \frac{L}{2} \langle i^2 \rangle_T, \quad (24)$$

где под $\langle i^2 \rangle_T$ понимается усреднение, выполненное за такой же период изменения тока

$$\langle i^2 \rangle_T = \frac{i_*^2}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right)^2. \quad (25)$$

Подставляя в (24) соотношения (23) и (25), получим для вносимой индуктивности выражение

$$L = L_* \left(1 - r_1^2 / R^2\right)^{-2}, \quad (26)$$

$$\text{где } L_* = 4\rho^2 / (\mu_0 v^2 V) \quad (27)$$

– масштаб индуктивности, а

$$V = \pi R^2 h \quad (28)$$

– объем цилиндра с полостью.

На рис. 4 представлена зависимость приведенной индуктивности L/L^* от приведенного радиуса полости цилиндра r_1/R . Как видно из рисунка, ее значение совпадает со значением 1 при $r_1 \rightarrow 0$. Для радиально тонких цилиндров при выполнении условия $r_1/R \rightarrow 1$ индуктивность резко увеличивается по сравнению с масштабом.

Это свойство вносимой индуктивности позволяет ее увеличивать за счет изменения радиальной толщины при реализации тонких колец или тонкостенных удлиненных цилиндров. В этом случае они нагреваются меньше.

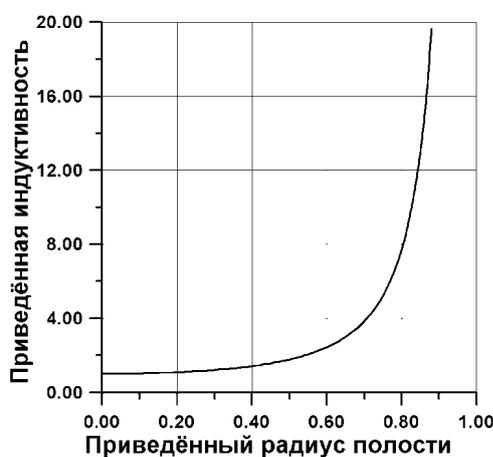


Рис. 4. Зависимость приведённого значения индуктивности от приведённого радиуса цилиндрической полости

Оценки вносимой индуктивности

Поскольку современные материалы от проводников до собственных полупроводников имеют удельное сопротивление, изменяющееся в диапазоне

$$15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м} < \rho < 2,5 \text{ кОм} \cdot \text{м},$$

то формулы для расчета вносимой индуктивности (26) и (27) дают широкие возможности для ее изменения.

В таблице 1 рассчитаны значения частоты переменного тока ν в герцах, которые для объёма бесполого цилиндра с радиусом $R=1$ см и высотой $h=1$ см, дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для

различных проводящих материалов. В таблице 1 введены обозначения: материал КЭФ – кремний электронный легированный фосфором с удельным сопротивлением $\rho=0,1$ Ом·см; германий взят с удельным сопротивлением $\rho=47$ Ом·см; кремний взят с удельным сопротивлением $\rho=230$ кОм·см).

Из таблицы 1 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от сотых герца (медь) до герц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 кГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это килогерцы и десятки килогерц, а для полупроводников – десятки и тысячи гигагерц.

Таблица №1

Значения частоты переменного тока ν в герцах для различных проводящих материалов

Материал/ индуктивность	Медь	Вольфрам	Никель	Нихром	КЭФ	Германий	Кремний
100 мГн	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$1,95 \cdot 10^{-1}$	3,18	$3,18 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^6$	$7,32 \cdot 10^9$
10 мГн	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	$6,18 \cdot 10^{-1}$	10,1	$1,01 \cdot 10^4$	$4,73 \cdot 10^6$	$2,32 \cdot 10^{10}$
1 мГн	$4,93 \cdot 10^{-1}$	1,56	1,95	31,8	$3,18 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^7$	$7,32 \cdot 10^{10}$
100 мкГн	1,56	4,93	6,18	101	$1,01 \cdot 10^5$	$4,73 \cdot 10^7$	$2,32 \cdot 10^{11}$
10 мкГн	4,93	15,6	19,5	318	$3,18 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^8$	$7,32 \cdot 10^{11}$
1 мкГн	15,6	49,3	61,8	$1,01 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^6$	$4,73 \cdot 10^8$	$2,32 \cdot 10^{12}$
100 нГн	49,3	156	195	$3,18 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^9$	$7,32 \cdot 10^{12}$
10 нГн	156	493	618	$1,01 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^7$	$4,73 \cdot 10^9$	$2,32 \cdot 10^{13}$
1 нГн	493	1560	1950	$3,18 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^{10}$	$7,32 \cdot 10^{13}$

Экспериментальные исследования эффекта вносимой индуктивности для катушек сантиметрового геометрического размера и выше возможно введением в них осесимметричных полых цилиндрических сердечников с различной проводимостью [7,9].

Выводы

Предложен аналитический метод расчёта индукционных и индуктивных свойств цилиндра произвольной высоты с азимутальной плотностью вихревого тока.

Метод основан на решении первого уравнения Максвелла для цилиндрической симметрии исследуемых электромагнитных полей, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг.

Получены радиальные распределения азимутальной компоненты напряжённости вихревого электрического поля, плотности токов Фуко и удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводника.

Определены зависимости среднего значения ЭДС в цилиндре, индукционного тока и интегрального омического сопротивления от приведённого радиуса полости цилиндра.

Получена формула для вычисления вносимой индуктивности проводящего цилиндра.

Её зависимость от приведённого радиуса полости проводящего цилиндра, квадрата удельного сопротивления, квадрата частоты переменного тока и объёма позволяет изменять вносимую индуктивность в широком диапазоне значений.

Оценки, проведённые для существующих проводников и полупроводников, указывают на то, что больших значений индуктивности можно добиться на низких частотах для материалов с малым удельным сопротивлением и малых значений индуктивности – на СВЧ и КВЧ для материалов с большим удельным сопротивлением.

Заключение

В заключение обсудим пределы применимости построенной физико-математической модели. Как известно, это можно сделать только в том случае, если удастся продвинуться в дальнейшем обобщении и понимании полученных результатов.

Вдумчивый читатель скажет, что при возникновении токов Фуко в цилиндре обязательно появится дополнительное переменное неоднородное магнитное поле (поле отклика вещества \vec{B}_1), которое будет иметь две компоненты B_{1r} и B_{1z} . и влияние которого на полученные вычисления необходимо учитывать.

Читатель, конечно, прав и такой учёт при вычислении вносимой индуктивности должен быть сделан. В дальнейшем нужно учесть и потери энергии суммарного магнитного поля, возникающие за счёт джоулева нагрева проводящего кольца.

Но, поскольку учёт этих явлений является дальнейшим расширением рамок полученной физико-математической модели, то удовлетворим это замечание введением некоторого математического условия, которое ограничит рамки предложенного исследования.

$$\langle \vec{B}_1^2 \rangle_T \ll \langle \vec{B}_0^2 \rangle_T. \quad (29)$$

Что означает следующее: энергия внешнего магнитного поля, вносимая в проводящий цилиндр за период, оказывается значительно большей, чем энергия магнитного поля токов Фуко, вносимая в проводник за то же самое время. Как показано в дальнейшем, даже частичный учёт диамагнетизма токов Фуко, приводит к тому, что условие (29) будет выполняться в достаточно широкой части низкочастотной области.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №12-08-00654/12 (2012-2013 г.г.).

Литература:

1. El-Sharawy. USP. Monolithic balanced RF power amplifier. US 6, 424, 227 B1; jul. 23, 2002.
2. Komijani et al. USPAP. Reconfigurable distributed active transformers. US 2003/0169113 A1; Sep. 11, 2003.

3. Aoki et al. USAP. Distributed circular geometry power amplifier architecture. US 2005/0030098 A1; feb. 10, 2005.

4. Sanderson. USAP. High Q monolithic inductors for use in differential circuits. US 2006/0220737 A1; Oct. 5, 2006.

5. Lee et al. USAP. Systems and method for power amplifiers with voltage boosting multi-primary transformers. US 2008/0164941 A1; Jul. 10, 2008.

6. Калантаров П.Л. , Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: справочная книга. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.

7.Сапогин В.Г., Крутччинский С.Г., Прокопенко Н.Н., и др. Интегральные индуктивности и трансформаторы аналоговых микросхем СВЧ – диапазона. – Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2010. – С. 273.

8.Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И., Манжула В.Г. Погонная индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока. Инженерный вестник Дона. №4(часть 1), 2012.
<http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4tly2012/1264>

9.Сапогин В.Г., Марчук В.И., Манжула В.Г. Промежуточный отчёт по гранту РФФИ «Теоретические основы проектирования интегральных индуктивностей для сложных функциональных блоков и IP – модулей систем связи и телекоммуникаций нового поколения». Проект № 12-08-00654а. 2012, – С. 79.

10. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Будяков А.С. О методах измерения малых индуктивностей для радиотехнических систем на кристалле. Инженерный вестник Дона. №1, 2013.
<http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n1y2013/1566>