

Построение математической модели и расчет численных значений оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса

Л.Ю. Фадеева¹, А.Н.Титов²

¹Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ

²Казанский национальный исследовательский технологический университет –
КНИТУ

Аннотация: Разработан алгоритм и составлена программа на языке программирования Python для расчета численных значений оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью, являющегося обобщением марковского процесса с рациональным спектром. В основе построения оптимального оператора фильтрации с запаздыванием лежит спектральная теория случайных процессов. Расчетная формула оператора фильтрации была получена с использованием теории L-марковских процессов, методов вычисления стохастических интегралов, теории функций комплексного переменного и методов тригонометрической регрессии. Рассмотрен интересный с точки зрения управления сложными стохастическими системами пример L-марковского процесса (сигнала) с квазирациональным спектром. За основу при построении математической модели оптимального оператора фильтрации с запаздыванием была взята тригонометрическая модель. Показано, что значения оператора фильтрации с запаздыванием представляются линейной комбинацией значений принимаемого сигнала в определенные моменты времени и значений синусоидальных и косинусоидальных функций в те же моменты. Установлено, что числовые значения оператора фильтрации существенно зависят от параметра β совместной спектральной плотности принимаемого и передаваемого сигналов, в связи с чем в работе рассматривались три разные задачи прохождения сигнала через разные физические среды. Установлено, что абсолютная величина действительной части оператора фильтрации на всех трех интервалах изменения срока запаздывания и во всех трех средах превышает абсолютную величину мнимой части в среднем в два и более раз. Построены графики зависимости действительных и мнимых частей оператора фильтрации от срока запаздывания τ , а также трехмерные графики зависимости самого оператора фильтрации с запаздыванием от срока запаздывания. Дано физическое обоснование полученным результатам.

Ключевые слова: случайный процесс, L-марковский процесс, шум, фильтрация с запаздыванием, спектральная характеристика, оператор фильтрации, тригонометрический тренд, стандартизованная ошибка аппроксимации

Введение. Моделирование процесса фильтрации сигнала в соответствии с заданными требованиями, в том числе, и с учетом свойства среды, через которую сигнал распространяется, является ключевой задачей

при решении многих вопросов в области радиофизики, микроэлектроники и обработки сигналов в телекоммуникациях.

Фильтрация с запаздыванием применяется при обработке сигналов в измерительных приборах для повышения точности измерений, устранения шумов [1,2], а также в полупроводниковой промышленности, где она применяется для контроля при производстве в процессах нанесения тонких плёнок, травления, литографии, выявлении скрытых дефектов [3,4].

В радиотехнических и радиофизических задачах среда рассматривается как фильтр, характеристики которого определяются физическими процессами, возникающими в этой среде. Свойства среды влияют на полосу пропускания, затухание на разных частотах (дисперсия и поглощение), фазовый сдвиг (групповая и фазовая скорость) и т.д.

Под нахождением явного вида оператора фильтрации будем понимать получение математически обоснованного и физически адекватного оператора, позволяющего оптимально оценить текущее состояние системы и на основе найденной оценки предсказать будущее поведение сигнала.

Целью данной работы является разработка алгоритма и расчет численных значений оптимального линейного оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковских процессов с квазирациональной спектральной плотностью.

Методы решения задачи. В данной работе решается задача выделения передаваемого сигнала $\xi(s)$ из принимаемого сигнала

$$\rho(s) = \xi(s) + \eta(s) \quad (1)$$

на фоне шума $\eta(s)$, математическое ожидание которого предполагается равным нулю: $M\eta(s) \equiv 0$. [5,6]

С помощью аппарата функций комплексного переменного задача фильтрации может быть поставлена следующим образом: необходимо найти

аналитическое выражение для линейного оператора $\mathcal{L}$ фильтрации с запаздыванием:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = L \{ \rho(s), s \leq t \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{\tau}(\omega) dZ(\omega). \quad (2)$$

В формуле (2) $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями из спектрального разложения принимаемого сигнала $\rho(s)$:

$$\rho(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega); \quad (3)$$

а $\Phi_{\tau}(\omega)$ – функция, называемая спектральной характеристикой фильтрации. [5,6]

В данной работе рассматривается нерациональная плотность $f_{\rho\rho}(\omega)$ принимаемого сигнала $\rho(s)$ и рациональная совместная спектральная плотность $f_{\xi\rho}(\omega)$ вида:

$$f_{\rho\rho}(\omega) = |Q(\omega)|^2 / \left| \sum_{k=0}^n Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \right|^2; \quad (4)$$

$$f_{\xi\rho}(\omega) = |U(\omega)|^2 / |S(\omega)|^2. \quad (5)$$

Все параметры в формулах (4) – (5) определены в работе авторов [7].

В работе авторов [7] на основе методики известного математика А. Яглома [6] получена следующая явная формула спектральной характеристики оптимальной линейной фильтрации $\Phi_{\tau}(\omega)$ с запаздыванием для сигнала $\xi(s)$ в момент $t + \tau$, $\tau < 0$ по известным значениям в прошлом стационарного принимаемого сигнала $\rho(s)$ со спектральной плотностью (4):

$$\Phi_{\tau}(\omega) = \frac{e^{i\tau\omega} \cdot |U(\omega)|^2 G(\omega) \sum_{j=0}^{j_0} \bar{Q}_j(\omega) e^{i\omega g_j} + P(\omega) \cdot G(\omega)}{|Q(\omega)|^2 \cdot |S(\omega)|^2}; \quad (6)$$

$$\Psi_{\tau}(\omega) = \frac{|U(\omega)|^2 \sum_{j=j_0+1}^n \bar{Q}_j(\omega) e^{i\omega(g_j+\tau)} - P(\omega)}{\bar{G}(\omega) |S(\omega)|^2}. \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) число j_0 , $0 \leq j_0 \leq n$, определяется из соотношений $g_{j_0} < -\tau \leq g_{j_0+1}$, а неизвестные коэффициенты полинома $P(\omega)$ однозначно

находятся из системы линейных алгебраических уравнений, обеспечивающих аналитичность функций $\Phi_\tau(\omega)$ вида (6) в H^- и $\Psi_\tau(\omega)$ вида (7) в H^+ .

Результаты работы. Применим формулу (6) для расчета значений оператора фильтрации L-марковского [7,8] принимаемого сигнала $\rho(s)$ со спектральной плотностью

$$f_{\rho\rho}(\omega) = 1/|\tilde{G}(\omega)|^2 = 1/|G_0(\omega) + G_1(\omega)e^{-i\omega} + G_2(\omega)e^{-2i\omega}|^2 \quad (8)$$

и совместной спектральной плотностью

$$f_{\xi\rho}(\omega) = 1/|S(\omega)|^2 = 1/|\omega^2 + \beta^2|. \quad (9)$$

Параметры плотностей $f_{\rho\rho}(\omega)$ и $f_{\xi\rho}(\omega)$ определены в работах авторов [7,9], там же установлена необходимость соблюдения неравенств:

$$b > a > 0, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad (10)$$

В работе авторов [7] получены следующие формулы для спектральной характеристики $\Phi_\tau(\omega)$ при плотностях (8,9) в разных интервалах изменения τ :

$$\text{в случае } 0 \leq -\tau < 1: \quad \Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega) \cdot [e^{i\omega\tau} \bar{G}_0(\omega) + A\omega + B] / (\omega^2 + \beta^2); \quad (11)$$

$$\text{в случае } 1 \leq -\tau < 2: \quad \Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega) \cdot \{e^{i\omega\tau} \cdot [\bar{G}_0(\omega) + \bar{G}_1(\omega)e^{i\omega}] + A\omega + B\} / (\omega^2 + \beta^2); \quad (12)$$

$$\text{в случае } (-\tau) \geq 2: \quad \Phi_\tau(\omega) = \tilde{G}(\omega) [e^{i\omega\tau} \bar{\tilde{G}}(\omega) + A\omega + B] / (\omega^2 + \beta^2), \quad (13)$$

где неизвестные коэффициенты A и B многочлена $P(\omega) = A\omega + B$ имеют вид:

$$\text{при } (-\tau) \geq 2: \quad A = (\varphi + \lambda + 2a\sigma) / (2\beta i), \quad B = -(\varphi + \lambda + 2a\sigma) / 2, \quad (14)$$

$$\text{где } \sigma = e^{\beta(\tau+1)}, \quad \mu = (\bar{F} + \bar{H} \cdot \beta i) e^{-\beta(\tau+2)}, \quad \varphi = e^{\beta\tau} (\beta \bar{D} i - \bar{E}), \quad \lambda = (\bar{F} - \beta \bar{H} i) e^{\beta(\tau+2)}; \quad (15)$$

$$\text{при } 0 \leq -\tau < 1: \quad A = [\mu - \varphi + (2a/\sigma)] / (2\beta i), \quad B = [\mu + \varphi + (2a/\sigma)] / 2; \quad (16)$$

$$\text{а при } 1 \leq -\tau < 2: \quad A = (\varphi + \mu + 2a\sigma) / (2\beta i); \quad B = (\mu - \varphi - 2a\sigma) / 2. \quad (17)$$

Подставим в спектральное представление (2) оператора фильтрации формулы (11) – (13) для $\Phi_\tau(\omega)$.

Тогда оператор $\tilde{\xi}(t; \tau)$ будет представлять собой сумму интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} [(W_k \omega^2 + V_k \omega + M_k) / (\omega^2 + \beta^2)] e^{i\omega(t-r_k)} dZ(\omega)$, где $r_1 = \tau$, $r_2 = \tau - 1$, $r_3 = \tau - 2$, $r_4 = 0$, $r_5 = -1$, $r_6 = -2$, $r_7 = \tau + 1$. Разлагая подынтегральные

рациональные дроби на простейшие, в которых в числителе стоят неопределенные коэффициенты X_k и Y_k , получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_k \omega^2 + V_k \omega + M_k}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t-r_k)} dZ(\omega) = W_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-r_k)} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_k e^{i\omega(t-r_k)}}{\omega - \beta i} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_k e^{i\omega(t-r_k)}}{\omega + \beta i} dZ(\omega). \quad (18)$$

Рассмотрим подробно случай $0 \leq -\tau < 1$; остальные два случая приводят к аналогичным результатам.

Итак, подставив формулу (11) в (2), получим:

$$\begin{aligned} \xi(t; \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{[e^{i\omega \tau} G_0(\omega) + A\omega + B] \tilde{G}(\omega) dZ(\omega)}{\omega^2 + \beta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau)} \frac{G_0(\omega) \bar{G}_0(\omega) dZ(\omega)}{\omega^2 + \beta^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{G}_0(\omega) G_1(\omega)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t+\tau-1)} dZ(\omega) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{G}_0(\omega) G_2(\omega)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t+\tau-2)} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(\omega)(A\omega + B)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega t} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\omega)(A\omega + B)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t-1)} dZ(\omega) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_2(\omega)(A\omega + B)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t-2)} dZ(\omega) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 \end{aligned} \quad (19)$$

Подынтегральные выражения при экспонентах в первом, третьем четвертом и шестом интегралах представляют собой неправильные, а во втором и пятом интегралах – правильные рациональные дроби. Разлагая далее последние на простейшие дроби, как это было описано выше, продемонстрируем эту процедуру при расчете третьего интеграла.

Итак,

$$\begin{aligned} J_3 = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{G}_0(\omega) G_2(\omega)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t+\tau-2)} dZ(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{D}\omega + \bar{E})(H\omega + F)}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega(t+\tau-2)} dZ(\omega) = \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}H e^{i\omega(t+\tau-2)} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_3 e^{i\omega(t+\tau-2)}}{\omega - i\beta} dZ(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_3 e^{i\omega(t+\tau-2)}}{\omega + i\beta} dZ(\omega). \end{aligned} \quad (20)$$

Числа X_3 и Y_3 находятся, как уже отмечалось, методом неопределенных коэффициентов и равны:

$$X_3 = (\bar{E}H + \bar{D}F)/2 + (\bar{E}F - \beta^2 \bar{D}H)/(2\beta i); \quad Y_3 = (\bar{E}H + \bar{D}F)/2 - (\bar{E}F - \beta^2 \bar{D}H)/(2\beta i). \quad (21)$$

Заменим простейшие дроби в двух последних интегралах в (20) несобственными интегралами:

$$1/(\omega - \beta i) = i \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \beta i)s} ds; \quad 1/(\omega + \beta i) = -i \int_0^{\infty} e^{i(\omega + \beta i)s} ds. \quad (22)$$

Тогда интеграл J_3 представится в виде:

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}H e^{i\omega(t+\tau-2)} dZ(\omega) + \int_0^{\infty} iX_3 e^{-\beta s} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau-2-s)} dZ(\omega) \right] ds - \int_0^{\infty} iY_3 e^{-\beta s} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+\tau-2+s)} dZ(\omega) \right] ds. \quad (23)$$

Первый интеграл в правой части формулы для J_3 в силу (3) есть значение сигнала $\rho(v)$ в точке $v = t + \tau - 2$, а стохастические интегралы, стоящие в квадратных скобках и распространенные на всю ось $(-\infty; \infty)$ представляют собой в силу спектрального представления (3) принимаемого сигнала $\rho(v)$ его значения в моменты времени $v = t + \tau - 2 - s$ и $v = t + \tau - 2 + s$ соответственно, поэтому окончательное выражение для интеграла J_3 будет следующим:

$$J_3 = \bar{D}H\rho(t + \tau - 2) + \int_0^{\infty} iX_3 e^{-\beta s} \rho(t + \tau - 2 - s) ds - \int_0^{\infty} iY_3 e^{-\beta s} \rho(t + \tau - 2 + s) ds.$$

Аналогичным образом можно представить и остальные пять интегралов в формуле (19), в результате чего оптимальный оператор фильтрации с запаздыванием в случае $0 \leq -\tau < 1$ примет следующий окончательный вид:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = D\bar{D}\rho(t + \tau) + \bar{D}H\rho(t + \tau - 2) + DA\rho(t) + HA\rho(t - 2) + \sum_{k=1}^6 i \int_0^{\infty} e^{-\beta s} [X_k \rho(t - t_k) - Y_k \rho(t - t_k + 2s)] ds. \quad (24)$$

где $t_1 = s - \tau$; $t_2 = s + 1 - \tau$; $t_3 = s + 2 - \tau$; $t_4 = s$; $t_5 = s + 1$; $t_6 = s + 2$.

Вычисляя подобным образом 22 интеграла в случае $1 \leq -\tau < 2$, и 30 интегралов в случае $(-\tau) \geq 2$ придем к аналогичным (24) представлениям для оптимального оператора фильтрации.

Формулы для оптимального оператора фильтрации с запаздыванием, выведенные для трех случаев $0 \leq -\tau < 1$; $1 \leq -\tau < 2$; $(-\tau) \geq 2$ можно объединить в одну общую формулу:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; \tau) = & D\bar{D}\rho(t + \tau) + \bar{D}H\rho(t + \tau - 2) + DA\rho(t) + HA\rho(t - 2) + \Omega + \\ & + i \sum_{k=1}^R \int_0^{\infty} e^{-\beta s} [X_k \rho(t - s - z_k) - Y_k \rho(t + s - z_k)] ds, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\Omega = 0$; $R = 6$ при $0 \leq -\tau < 1$; $\Omega = 0$; $R = 9$ при $1 \leq -\tau < 2$; $R = 12$; $\Omega = D\bar{H}\rho(t + \tau + 2) + H\bar{H}\rho(t + \tau)$ при $-\tau \geq 2$; (26)

$$t_7 = s - \tau - 1, t_8 = t_2, t_9 = t_1, ; t_{10} = s - \tau - 2, t_{11} = t_7, t_{12} = t_1. z_1 = z_9 = z_{12} = -\tau; \\ z_2 = z_8 = 1 - \tau; z_3 = 2 - \tau; z_4 = 0; z_5 = 1; z_6 = 2; z_7 = z_{11} = -\tau - 1. \quad (27)$$

(Ведено обозначение $z_k = t_k - s$ при $k = 1, 2 \dots 12$).

Как видим из формулы (25), препятствием для расчета численного значения оптимального оператора фильтрации с запаздыванием является невозможность расчета стохастических интегралов, стоящих под символом суммы во второй, интегральной части этой формулы, поскольку нам неизвестна формула принимаемого сигнала $\rho(v)$. Однако в нашем распоряжении имеется график принимаемого сигнала, снятый, например, с осциллографа или с анализатора спектра (в нашей задаче смоделированный по его спектральной плотности). Этот график можно оцифровать (современные приборы позволяют сразу получить сигнал в «цифре») и получить таблицу значений принимаемого сигнала, при этом расстояния между этими значениями выбирать такими, т.е. с такой точностью, как этого требует техническое задание.

Далее аппроксимируем принимаемый сигнал $\rho(v)$ тригонометрическим трендом с N гармониками. Как показывает практика исследований радиосигналов, а также вид графика сигнала $\rho(v)$, статистической моделью, наилучшим образом аппроксимирующей такие сигналы, как правило, оказывается тригонометрическая регрессия.

Итак, подставим в формулу (25) представление $\rho(v)$ в виде тригонометрической регрессии.

$$\rho_{теор}(v) = \hat{\rho}(v) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kv + b_k \sin kv), \quad (28)$$

где a_0, a_k , и $b_k, k = 1, 2, 3, \dots, N$ вычисляются следующим образом:

$$a_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) / r; \quad a_k = \left(\frac{2}{r} \right) \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) \cos kt_j; \quad b_k = \left(\frac{2}{r} \right) \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) \sin kt_j, \quad (29)$$

где t_j – моменты времени (периоды) изменения значений исследуемого сигнала.

Рассмотрим интеграл в выражении $i \sum_{k=1}^{12} X_k \int_0^{\infty} e^{-\beta s} \rho(t-s-z_k) ds$, проведем в нем замену: $t-s-z_k = y$ и подставим в него вместо $\rho(y)$ формулу (28).

$$\begin{aligned} \text{Тогда получим: } & \int_0^{\infty} e^{-\beta s} \rho(t-s-z_k) ds = \\ & = e^{-\beta(t-z_k)} a_0 \int_{-\infty}^{t-z_k} e^{\beta y} dy + e^{-\beta(t-z_k)} \sum_{j=1}^N a_j \int_{-\infty}^{t-z_k} e^{\beta y} \cos jy dy + e^{-\beta(t-z_k)} \sum_{j=1}^N b_j \int_{-\infty}^{t-z_k} e^{\beta y} \sin jy dy. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен a_0/β , а последние два интеграла берутся сначала по частям, а затем как решение простейшего интегрального уравнения, поэтому окончательно получим: $i \sum_{k=1}^{12} X_k \int_0^{\infty} e^{-\beta s} \rho(t-s-z_k) ds =$

$$= i \sum_{k=1}^{12} X_k \left[\frac{a_0}{\beta} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{j \sin j(t-z_k) + \beta \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\beta \sin j(t-z_k) - j \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} \right]. \quad (30)$$

Аналогичный результат получим, предварительно проведя в интеграле $\int_0^{\infty} e^{-\beta s} \rho(t+s-z_k) ds$ замену $t+s-z_k = y$.

Таким образом, второй интеграл в формуле (25) примет вид:

$$\begin{aligned} & -i \sum_{k=1}^N Y_k \int_0^{\infty} e^{-\beta s} \rho(t+s-z_k) ds = \\ & = -i \sum_{k=1}^N Y_k \left[\frac{a_0}{\beta} - \sum_{j=1}^N a_j \frac{j \sin j(t-z_k) - \beta \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\beta \sin j(t-z_k) + j \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

Подставляя рассчитанные интегралы (30), (31) в формулу (25), получим окончательную формулу для оптимального оператора фильтрации с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; \tau) = & D\bar{D}\rho(t+\tau) + \bar{D}H\rho(t+\tau-2) + D\bar{A}\rho(t) + H\bar{A}\rho(t-2) + \Omega + \\ & + i \sum_{k=1}^{12} X_k \left[\frac{a_0}{\beta} + \sum_{j=1}^N a_j \frac{j \sin j(t-z_k) + \beta \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\beta \sin j(t-z_k) - j \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} \right] - \\ & - i \sum_{k=1}^N Y_k \frac{a_0}{\beta} + i \sum_{k=1}^N Y_k a_j \frac{j \sin j(t-z_k) - \beta \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2} - i \sum_{k=1}^N Y_k b_j \frac{\beta \sin j(t-z_k) + j \cos j(t-z_k)}{\beta^2 + j^2}, \quad (32) \end{aligned}$$

где величина Ω определяется формулой (26), а моменты времени z_k , $k=1, 2, \dots, 12$ задаются в виде (27).

Чтобы получить значение оператора фильтрации с запаздыванием по формуле (32), зададим в спектральной плотности (8) принимаемого сигнала $\rho(s)$ такие значения параметров: $a = 0,5$; $b = 0,6$; $c = 0,1$; $d = 5$ и сгенерируем на виртуальном приборе, выполненном на языке программирования LabVIEW, 5000 значений принимаемого сигнала $\rho(s)$.

Все расчеты по формуле (32) выполнялись с использованием программы, составленной авторами на языке программирования Python. Вначале из 5000 исходных данных было отобрано 4657 точек с тем, чтобы значения принимаемого сигнала $\rho(s)$ на концах отрезка изменения аргумента – момента времени s – были примерно одинаковыми. Далее моменты времени s_j были преобразованы в точки v_j отрезка $[-\pi; \pi]$ с помощью преобразования $v_j = \frac{\pi}{(V-u)}(2s_j - V - u)$, где $(V-u)$ – длина отрезка исходных данных s_j . Следующий шаг заключался в аппроксимации принимаемого сигнала $\rho(v)$ тригонометрической регрессией (28), в которой коэффициенты a_0 , a_k и b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$ подсчитываются по формулам (29) [10].

Количество гармоник N выберем равным 24 и рассчитаем при каждом N коэффициенты a_0 , a_k и b_k по формулам (29).

Рассчитаем далее стандартизованные ошибки аппроксимации для каждого $N (1, 2, \dots, 24)$

$$COA = \sqrt{\sum_{j=0}^{r-1} [\rho_{факт}(v_j) - \hat{\rho}_{теор}(v_j)]^2 / r}. \quad (33)$$

Среди рассчитанных 24 значений COA определяем значение $N = 13$, при котором $COA(N=13) \approx 5,6$, а уже при $N = 14$ $COA(N=14) \approx 1,08$. Задаем допустимую погрешность вычисления COA как $\varepsilon = 0,01$ и находим минимальное значение N , при котором $|COA(N) - COA(14)| < \varepsilon$ для всех $14 \leq N \leq 24$. Таким значением оказалось $N = N_{opt} = 16$. Таким образом,

наилучшей моделью тригонометрической регрессии будет модель (28) с $N = 16$ -ю гармониками.

Как видно из формулы (32), параметр β совместной спектральной плотности $f_{\xi\rho}(\omega)$ существенно влияет на численное значение оператора фильтрации с запаздыванием. Поэтому в работе рассматриваются три случая $\beta=2$, $\beta=17$ и $\beta=30$, соответствующие трем разным средам, существенно различающимся с физической точки зрения. Если ввести безразмерный коэффициент $\delta = \beta/\omega$, где ω имеет смысл круговой частоты, а β задает параметры среды, то представятся три случая :

Первый случай: $\delta < 1$ ($\beta = 2$) – этот случай будет соответствовать сильно дисперсной среде, в которой распространяется сигнал $\xi(s)$. В такой среде почти вся энергия сигнала поглощается или рассеивается, например, вследствие высоких потерь в проводящей среде.

Второй случай при $\delta \approx 1$ ($\beta = 17$) соответствует умеренно дисперсной среде. Примером может служить оптоволокно, используемое в телекоммуникациях.

Третий случай при $\delta > 1$ ($\beta = 30$) соответствует слабо дисперсной среде. В такой среде происходит незначительное поглощение или рассеяние энергии сигнала (распространение акустических волн в кристалле).

Таким образом, в работе решались фактически три задачи распространения сигнала в трех разных средах. Для каждого из этих случаев рассчитывался оператор фильтрации с запаздыванием в трех интервалах изменения срока запаздывания $(-\tau)$: $0 \leq -\tau < 1$; $1 \leq -\tau < 2$; $2 \leq -\tau < 3$.

Составленная авторами программа позволяет пользователю после задания параметров β и времени запаздывания τ получить численное значение оптимального оператора фильтрации с запаздыванием.

Например, введя параметры $\beta = 30$ и $\tau = -0,7$, пользователь получит:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(\beta = 30; \tau = -0,7) &= 8,04 - 9,03i. \text{ Аналогично} \\ \tilde{\xi}(\beta = 30; \tau = -1,5) &= -17,93 - 5,70i; \quad \tilde{\xi}(\beta = 30; \tau = -5) = -88,17 + 7,69i; \\ \tilde{\xi}(\beta = 17; \tau = -0,5) &= -24,51 + 17,36i \quad \tilde{\xi}(\beta = 17; \tau = -1,6) = 16,28 - 19,64i; \\ \tilde{\xi}(\beta = 17; \tau = -3,2) &= -62,92 + 17,71i; \quad \tilde{\xi}(\beta = 2; \tau = -0,9) = 30,16 + 39,59i; \\ \tilde{\xi}(\beta = 2; \tau = -1,6) &= 29,58 - 38,56i; \quad \tilde{\xi}(\beta = 2; \tau = -6) = -41,98 + 23,92i.\end{aligned}$$

Для каждого из трех интервалов изменения срока запаздывания τ были составлены таблицы значений оптимального оператора фильтрации с запаздыванием и по ним построены графики действительных и мнимых частей этого оператора с шагом $h = 0,1$. (График для интервала $(-2\pi; -2)$ был получен с шагом $h = 0,1$; а таблица – с шагом $h = 0,5$).

Проведем подробный анализ случая умеренно дисперсной среды с $\beta = 17$.

Составим таблицу значений оператора $\tilde{\xi}$ при $\beta = 17$ и на всех трех интервалах изменения $(-\tau)$: 1) $0 \leq -\tau < 1$; 2) $1 \leq -\tau < 2$; 3) $2\pi \geq (-\tau) \geq 2$.

Таблица.

Значения оптимального оператора фильтрации с запаздыванием τ при $\beta = 17$.

τ	ξ	τ	ξ	τ	ξ
-0,9	9,47+18,99 <i>i</i>	-1,9	-38,86+7,90 <i>i</i>	-6,28	-79,48+1,73 <i>i</i>
-0,8	49,82-0,43 <i>i</i>	-1,8	-1,23+20,43 <i>i</i>	-6,0	55,88+9,42 <i>i</i>
-0,7	7,35-19,56 <i>i</i>	-1,7	41,78+1,23 <i>i</i>	-5,5	7,93+14,85 <i>i</i>
-0,6	-48,67-6,27 <i>i</i>	-1,6	16,28-19,64 <i>i</i>	-5,0	-44,72+14,72 <i>i</i>
-0,5	-24,51+17,36 <i>i</i>	-1,5	-37,85-7,61 <i>i</i>	-4,5	-84,60+6,08 <i>i</i>
-0,4	38,44+12,08 <i>i</i>	-1,4	-30,95+17,67 <i>i</i>	-4,0	-83,17-5,47 <i>i</i>
-0,3	36,84-13,56 <i>i</i>	-1,3	26,18+14,35 <i>i</i>	-3,5	-27,98-16,98 <i>i</i>
-0,2	-19,46-17,74 <i>i</i>	-1,2	36,94-12,17 <i>i</i>	-3,0	45,02-20,38 <i>i</i>
-0,1	-31,37+4,51 <i>i</i>	-1,1	-17,32-18,13 <i>i</i>	-2,5	84,17-11,50 <i>i</i>
-0,0	25,07+6,45 <i>i</i>	-1,0	-41,81+5,88 <i>i</i>	-2,0	108,82-6,65 <i>i</i>

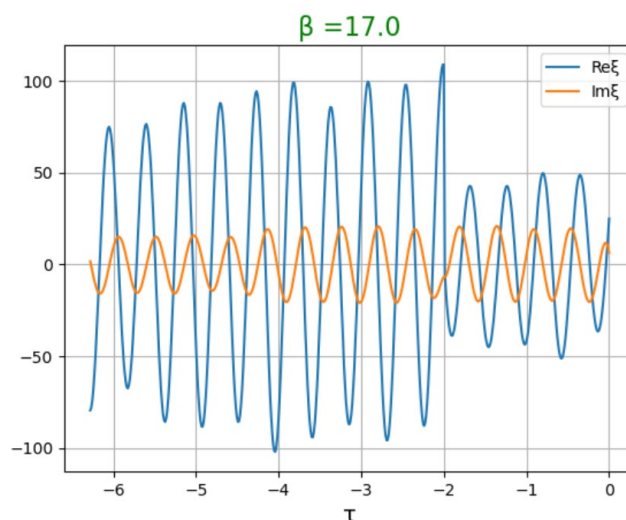


Рис.1. Значения действительной и мнимой частей оптимального оператора фильтрации с запаздыванием τ при $\beta = 17$.

При анализе таблицы воспользуемся широко распространенным в статистике понятием размаха R . За размах между действительными частями оператора фильтрации будем принимать модуль разности между максимальным и минимальным значениями среди всех действительных значений оператора, рассматриваемых на исследуемом интервале изменения τ : $R\{\text{Re}\tilde{\xi}\} = |\text{Re}_{\max}\tilde{\xi} - \text{Re}_{\min}\tilde{\xi}|$; аналогично, $R\{\text{Im}\tilde{\xi}\} = |\text{Im}_{\max}\tilde{\xi} - \text{Im}_{\min}\tilde{\xi}|$.

1. Рассмотрим первый интервал изменения τ . Из таблицы 1 видим, что $R\{\text{Re}\tilde{\xi}\} = 49,82 - (-48,67) = 98,49$; а $R\{\text{Im}\tilde{\xi}\} = 18,99 - (-19,56) = 38,55$.

Таким образом, в первом интервале изменения τ действительные части оператора фильтрации в среднем в 2,5 раза превосходят его мнимые части. Это означает, что фаза сигнала составляет примерно $21,8^\circ$; сигнал имеет выраженный синфазный характер с небольшим квадратурным компонентом.

2. На втором интервале изменения τ $(-2; -1]$ получим аналогично: $R\{\text{Re}\tilde{\xi}\} = 41,78 - (-41,81) = 83,59$; а $R\{\text{Im}\tilde{\xi}\} = 20,43 - (-19,64) = 40,07$, то есть действительные части оператора в среднем в 2 раза превосходят его мнимые части. Известно, что при соотношении 2:1 между действительной и

мнимой частью фаза сигнала составляет примерно $26,6^0$; сигнал преимущественно синфазный, но имеет заметную квадратурную составляющую, которая влияет на фазовый портрет сигнала.

3. В третьем интервале $[-2\pi; -2]$ будем иметь: $R\{\operatorname{Re}\tilde{\xi}\} = 108,82 - (-84,60) = 193,42$; а $R\{\operatorname{Im}\tilde{\xi}\} = 14,85 - (-20,38) = 35,23$, то есть действительные части оператора фильтрации в среднем превосходят его мнимые части в 5,5 раз. В этом случае фаза сигнала составляет примерно $10,3^0$; сигнал практически полностью синфазный, с очень малой квадратурной составляющей, что делает его близким к чисто косинусоидальному сигналу.

Аналогичные таблицы были составлены при $\beta = 2$ и $\beta = 30$.

Анализ полученных результатов привел к следующему общему выводу: если $(-\tau)$ лежит в интервале $[0;1)$, то при всех трех значениях β (среды с разной дисперсией) действительные части оператора фильтрации с запаздыванием превышают в среднем в 2,5 раза его мнимые части. Если $(-\tau)$ лежит в интервале $[1;2)$, то при всех β реальные части оператора фильтрации в среднем в 2 раза превышают его мнимые части. Это означает, что фаза сигнала составляет примерно $24,4^0$; сигнал имеет синфазный характер с квадратурным компонентом. Если $(-\tau)$ достаточно велико по сравнению с предыдущими случаями, то реальные части оператора фильтрации в среднем значительно превосходят его мнимые части, а именно, более, чем в 15 раз при $\beta = 30$ (слабо дисперсная среда); почти в 6 раз при $\beta = 17$ и всего в 1,7 раз при $\beta = 2$. Это означает, что сигнал синфазный, косинусоидальный, с небольшой квадратурной составляющей.

Очевидным фактом является превышение в среднем действительных частей оператора фильтрации при всех β и на всех интервалах изменения τ .

Это видно на приведенных сравнительных графиках действительной и мнимой частей оператора при $\beta = 17$. Аналогичный вид имеют графики и при $\beta = 2$, $\beta = 30$. Это означает, что среда, в которой распространяется сигнал, влияет на его амплитуду и фазу, причем, чем более среда обладает рассеивающим или поглощающим эффектом, тем значительно уменьшается его амплитуда и на больший угол сдвигается фаза сигнала. Чем ближе к точке наблюдения (меньше по модулю значения τ), тем очевиднее проявляются свойства среды. Сигнал в сильно дисперсной среде будет иметь выраженный синфазный характер с квадратурным компонентом, играющим важную роль и дающим представление о сигнале. Этот факт играет ключевую роль при амплитудно-квадратурной модуляции, кодировке сигнала, при решении задач о повышении помехоустойчивости систем связи и т.п.

Авторами составлены графики зависимости оператора фильтрации с запаздыванием при всех β (2; 17; 30) и на трех интервалах изменения $(-\tau)$ (всего 9 графиков). На оси ОХ были отложены действительные части оператора с запаздыванием $\xi(\pi - \tau)$, на оси ОУ – его мнимые части, а на оси ОZ $-(\tau)$. В работе приведены три графика:

1. $\beta = 2$; $0 \leq -\tau < 1$ и τ меняется с шагом $h = 0,01$, в результате имеем 100 точек оператора фильтрации на графике;
2. $\beta = 17$; $1 \leq -\tau < 2$ и τ меняется также с шагом $h = 0,01$, в результате чего имеем 100 точек – 100 значений оператора фильтрации на графике;
3. $\beta = 30$; $2\pi \geq (-\tau) \geq 2$ и τ меняется с шагом $h = 0,01$ и потому на графике имеем примерно 400 точек оператора фильтрации.

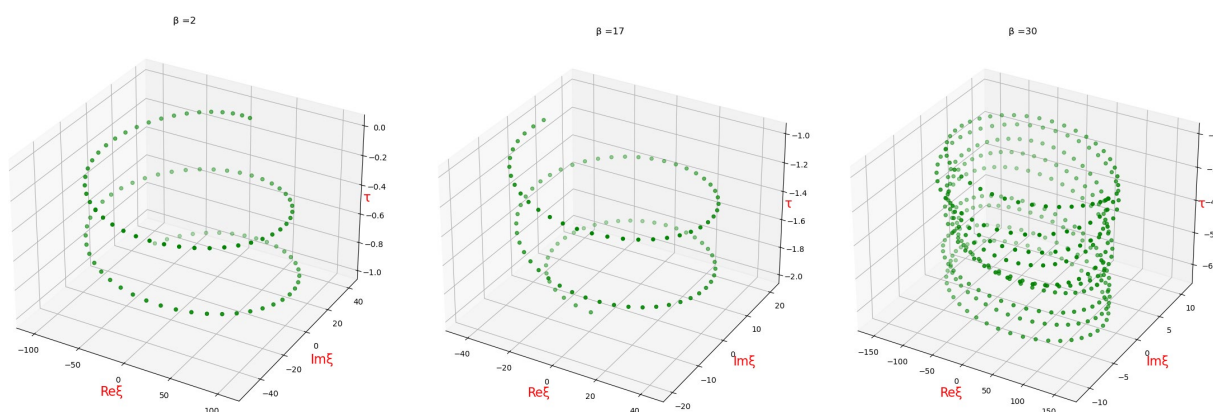


Рис.2. Зависимости оператора фильтрации с запаздыванием при различных β на трех интервалах изменения τ .

Вид графиков указывает на то, что процесс имеет циклическую природу с изменяющейся амплитудой, между его компонентами наблюдается фазовый сдвиг, что характеризует исследуемый сигнал как гармонический. Наблюдается эллиптическая поляризация и фазовое вращение во времени. Возможно, что процесс является квазипериодическим. Такое поведение процесса характерно для радиоволн и СВЧ сигналов, а также сигналов с модуляцией в динамических системах с периодическими или квазипериодическими возмущениями, когда наблюдается электромагнитный отклик в резонансных структурах.

Заключение. Получена явная формула оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью, обобщающего марковский процесс с рациональным спектром. При выводе формулы использовалась спектральная теория случайных процессов: спектральные представления процесса и его оптимального оператора фильтрации через спектральную характеристику, а также методы вычисления стохастических интегралов. Основой для получения формулы оператора фильтрации послужил метод, разработанный математиком А. Ягломом, а также теория функций комплексного переменного, теория L-марковских процессов и методы

корреляционно – регрессионного анализа. В работе рассмотрен интересный с точки зрения радиофизики пример L-марковского процесса со спектральной плотностью частного вида. Расчет числовых значений оператора фильтрации с запаздыванием этого процесса проводился по программе, составленной авторами на языке программирования Python. Показано, что числовые значения оператора фильтрации существенно зависят от параметра β совместной спектральной плотности принимаемого и передаваемого сигналов, поэтому в работе решались три разные физические задачи прохождения сигнала через сильно дисперсную среду ($\beta = 2$), умеренно дисперсную ($\beta = 17$) и слабо дисперсную среду ($\beta = 30$). Установлено, что во всех трех средах и на всех трех различных интервалах изменения срока запаздывания τ действительная часть оператора фильтрации с запаздыванием превышает его мнимую часть в среднем в 2 и более раз, что соответствует фазовому сдвигу, в среднем, на $24,4^\circ$. При всех трех значениях параметра β и на всех трех интервалах изменения срока запаздывания τ построены на плоскости графики зависимости действительной и мнимой частей оператора фильтрации от срока запаздывания τ и трехмерные графики зависимости оператора фильтрации с запаздыванием от срока запаздывания τ . Наблюдаемый на графиках процесс является гармоническим сигналом с фазовым сдвигом между его компонентами и с эллиптической поляризацией. Такое поведение характерно для электромагнитного отклика сигнала при прохождении через динамические системы с квазипериодической структурой. Результаты работы могут быть использованы в радиофизике, задачах обработки сигналов, при создании новых метаструктур функциональной электроники.

Литература

1. Приймак А.А. Реализация адаптации экстремальной фильтрации к реальному времени // Инженерный вестник Дона. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.
2. Акиншин Н.С., Петешов А.В., Румянцев В.Л., Хомяков К.А. Адаптивные алгоритмы оптимальной фильтрации сигнала. Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 69 – 79.
3. Li S., Huang S., Zhao W. Development of differential probes in pulsed eddy current testing for noise suppression / Sensors and Actuators A: Physical. 2007. Vol. 135, №2. pp. 675-679.
4. Васильев И. Зондовые измерения параметров полупроводников: комплексные решения / Электроника. 2017. №2 (00162). С. 72 – 77.
5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403 p.
6. Yaglom A.M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247 p.
7. Фадеева Л.Ю. Явный вид оптимального оператора фильтрации с запаздыванием для L-марковского процесса // Инженерный вестник Дона. 2025. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10312
8. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля // ДАН СССР, 1974, Т. 215, №5, 1974. С.1054-1057.
9. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.
10. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник / Под ред. Колемаева В.А. Серия «Высшее образование». М.: Инфра, 1997. 302с.

References

1. Prijmak A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.
2. Akinshin N.S., Peteshov A.V., Rumjancev V.L., Homjakov K.A. Tehnicheskie nauki. 2018. Vyp. 9. pp. 69 – 79.
3. Li S., Huang S., Zhao W. Sensors and Actuators A: Physical. 2007. Vol. 135, №2. pp. 675-679.
4. Vasil'ev I. J.Elektronika. 2017. №2 (00162). pp. 72 – 77.
5. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory Real Analysis / Translated by R.A. Silverman. Prentice Hall. 2009. 403 p.
6. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247 p.
7. Fadeeva L. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10312.
8. Molchan G.M. DAN SSSR, 1974, T. 215, №5, 1974. pp.1054-1057.
9. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyj. T.4. №4 (2024): vypusk 14. P. 1-8.
10. Kolemaev V.A., Kalinina V.N. [Probability theory and mathematical statistics] M.: Infra, 1997. 302 p.

Дата поступления: 8.08.2025

Дата публикации: 25.09.2025