

## Моделирование системы рефинансирования коммерческих банков

*А.С. Медяковская, А.Б. Усов*

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

**Аннотация:** Банковская система занимает главенствующее положение в современной рыночной экономике. Она непосредственно связана с рисками, так или иначе, влияющими на всю систему распределения активов. Специфика управления ресурсами в банке требует синтеза методов финансового и экономического анализа, применения методов бухгалтерского учета, стратегического планирования, бюджетирования. В данной статье описывается статическая двухуровневая математическая модель взаимодействия Центрального Банка РФ и коммерческого банка. Было проведено аналитическое исследование предложенной модели с использованием метода множителей Лагранжа.

**Ключевые слова:** двухуровневая иерархическая модель, равновесие Штакельберга, Центральный банк РФ, коммерческий банк, ставка рефинансирования, параметры управления, субъекты управления.

### Введение

Банковская система РФ имеет двухуровневую структуру [1]. К первому уровню относится Центральный банк России (далее ЦБ). ЦБ не занимается проведением операций с предприятиями или населением. В качестве клиентуры выступают коммерческие банки (далее КБ) и другие кредитные учреждения. Главная функция ЦБ – проведение эффективной денежно-кредитной политики, регулирующей как финансовую систему, так и экономику всей страны в целом [2].

Второй уровень включает в себя коммерческие банки и небанковские кредитные организации, а также филиалы и представительства иностранных банков. Основное предназначение кредитных организаций — это проведение банковских операций по кредитному, расчетно-кассовому и депозитному обслуживанию клиентов и субъектов экономических отношений [3].

Основными инструментами ЦБ в денежно-кредитной политике являются: процентные ставки по операциям ЦБ, обязательные резервные требования, рефинансирование кредитных организаций, операции на открытом рынке, валютные интервенции, эмиссия облигаций и др. В предложенной модели в качестве управления ЦБ выбирается ставка рефинансирования (ключевая ставка) [4]. Цель исследования – определение оптимального управления.

---

## Описание математической модели при побуждении

Для моделирования системы рефинансирования коммерческих банков будем использовать двухуровневую иерархическую модель, включающую в себя [5]:

- Субъект управления верхнего уровня (ЦБ);
- Субъект управления нижнего уровня (КБ);
- Управляемая система (клиенты КБ);

В рассматриваемой системе элементы взаимодействуют между собой следующим образом. КБ воздействует на УС, преследуя при этом свои собственные цели, которые вообще говоря могут не совпадать с объективно существующими общесистемными целями поддержания всей системы в состоянии гомеостаза. ЦБ является регулирующим органом, воздействующим на КБ для достижения целей устойчивого развития [6-8].

Будем полагать, что в системе действует следующая совокупность правил поведения:

1. ЦБ выбирает свою стратегию поведения первым и сообщает её всем остальным субъектам управления. ЦБ управляет ставкой рефинансирования. Управление корректируется таким образом, чтобы количество денег в обращении было как можно ближе к целевому ориентиру.
2. При известной стратегии ЦБ, совершает ход КБ. Он определяет величины процентных ставок по кредитам и депозитам и стремится к максимизации своей прибыли.

Каждый из участников системы стремится к максимизации своего дохода. Максимизация будет производиться на множестве тех стратегий и условий, которые позволяют поддерживать всю систему в заданном состоянии.

Целевая функция ЦБ имеет вид:

---

$$J_0 = rC(r) + \alpha D(r_d) + \psi A - \varphi R - SE \rightarrow \max_r, \quad (1)$$

где  $r$  – ставка рефинансирования;

$C(r)$  – кредиты, выдаваемые центральным банком коммерческому банку;

$\alpha$  – норма обязательного резервирования;

$D(r_d)$  – депозиты, привлечённые КБ;

$r_d$  – процентная ставка по депозитам;

$A$  – активы ЦБ;

$\psi$  – доходность активов ЦБ;

$R$  – затраты, связанные с организацией и поддержанием наличного обращения;

$\varphi$  – доля средств, направленная на затраты  $R$ ;

$SE$  – расходы на содержание филиалов и заработные платы сотрудников;

Ограничение на управление ЦБ:

$$r_{min} \leq r \leq r_{max}, \quad (2)$$

где  $r_{min}, r_{max} = const.$

Целевая функция КБ имеет вид:

$$J_1 = (r_c - Co)C(r_c) + (1 - r_d(1 + \alpha) - Co^*)D(r_d) - SE^* \rightarrow \max_{r_c, r_d}, \quad (3)$$

где  $r_c$  – ставка по выдаваемым кредитам;

$C(r_c)$  – кредиты, выдаваемые КБ;

$Co$  – издержки на осуществление операций по кредитам;

$\alpha$  – норма обязательного резервирования;

$D(r_d)$  – депозиты, привлечённые КБ;

$r_d$  – процентная ставка по депозитам;

$Co^*$  – издержки на осуществление операций по депозитам;

$SE^*$  – расходы на содержание офисов и заработные платы сотрудников;

Ограничение на управление КБ:

$$r_{c_{min}} \leq r_c \leq r_{c_{max}} \quad (4)$$

$$r_{d_{min}} \leq r_d \leq r_{d_{max}}$$

где  $r_{c_{min}}, r_{c_{max}}, r_{d_{min}}, r_{d_{max}} = const$ .

Заданное состояние системы описывается неравенством:

$$M(C) \leq M_{max} \quad (5)$$

где  $M_{max}$  – максимально возможное количество денег, находящихся в обращении, установленной денежно-кредитной политикой ЦБ;

$M(C)$  – функция, отражающая количество денег, находящихся в обращении.

Таким образом, в данной работе при побуждении исследуется стационарная иерархическая модель (1)-(5).

### Аналитическое исследование

Выберем вид функций для дальнейшего исследования модели:

$$D(r_d) = \sigma r_d^2 \quad C(r_c) = \frac{\gamma}{\sqrt{r_c}} \quad (6)$$

В качестве метода решения выберем метод множителей Лагранжа [9-10]. Подставим (6) в задачу (1)-(5). Решим задачу КБ (3)-(4):

$$J_1 = (r_c + r + Co) \frac{\gamma}{\sqrt{r_c}} + (1 - r_d(1 + \alpha) - Co^*) \sigma r_d^2 - SE^* \rightarrow \max_{r_c, r_d}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial r_c} = \frac{\gamma}{2\sqrt{r_c}} - \frac{\gamma(r + Co)}{2\sqrt{r_c^3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_c^* = r + Co$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial r_d} = 2\sigma r_d - 3\sigma r_d^2(1 + \alpha) - 2\sigma Co^* r_d = 0 \quad \Rightarrow \quad r_d^* = \frac{2 - 2Co^*}{3(1 + \alpha)}$$

Найдём вторые частные производные:

$$A = \frac{\partial^2 J_1}{\partial r_c^2} = -\frac{\gamma}{4\sqrt{r_c^3}} + \frac{3\gamma(r + Co)}{4r_c\sqrt{r_c^3}}$$

$$B = \frac{\partial^2 J_1}{\partial r_c \partial r_d} = \frac{\partial^2 J_1}{\partial r_d \partial r_c} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 J_1}{\partial r_d^2} = 2\sigma - 3\sigma r_d(1 + \alpha) - 2\sigma Co^*$$

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{3\gamma(r + Co) - \gamma r_c}{4r_c\sqrt{r_c^3}} (2\sigma - 3\sigma r_d(1 + \alpha) - 2\sigma Co^*) > 0$$

Таким образом, в точке  $[r + Co, \frac{2-2Co^*}{3(1+\alpha)}]$  функция  $J_1$  достигает максимума на множестве, удовлетворяющем (4).

Учитывая ограничение (4) получаем ещё четыре стационарные точки:  $(r_{d_{min}}, r_c^*), (r_d^*, r_{c_{min}}), (r_d^*, r_{c_{max}}), (r_{d_{max}}, r_c^*)$ .

Следует проверить каждую из полученных точек на оптимальность. Для этого найдём частные производные функции  $J_1$  в каждой из этих точек.

$$\frac{\partial J_1}{\partial r_c}(r_{d_{min}}, r_c^*) = \frac{\gamma}{2\sqrt{r_c}} - \frac{\gamma(r + Co)}{2\sqrt{r_c^3}} \quad \frac{\partial J_1}{\partial r_c}(r_{d_{max}}, r_c^*) = \frac{\gamma}{2\sqrt{r_c}} - \frac{\gamma(r + Co)}{2\sqrt{r_c^3}}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial r_d}(r_d^*, r_{c_{min}}) = 2\sigma r_d - 3\sigma r_d^2(1 + \alpha) - 2\sigma Co^* r_d$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial r_d}(r_d^*, r_{c_{max}}) = 2\sigma r_d - 3\sigma r_d^2(1 + \alpha) - 2\sigma C_o^* r_d$$

Оптимальное управление КБ имеет вид:

$$(r_d^*, r_c^*) = \begin{cases} (r_{d_{min}}, r_{c_{min}}), & \text{если } r_{min} \leq r \leq r_{c_{min}} + C_o \\ \left(\frac{2 - 2C_o^*}{3(1 + \alpha)}, r + C_o\right), & \text{если } r_{c_{min}} + C_o \leq r \leq r_{c_{max}} + C_o \\ (r_{d_{max}}, r_{c_{max}}), & \text{если } r_{c_{max}} + C_o \leq r \leq r_{max} \end{cases}$$

Решим задачу ЦБ. Пусть  $r_{min} \leq r_{c_{min}} + C_o \leq r_{c_{max}} + C_o \leq r_{max}$ .

Целевая функция ЦБ имеет вид:

$$J_0 = r \frac{\gamma}{\sqrt{r}} + (r + \alpha)\sigma r_d^2 + \psi A - \varphi R - SE \rightarrow \max_r$$

Область допустимых управлений разбивается на три интервала.

1.  $r_{min} \leq r \leq r_{c_{min}} + C_o$

В этом случае  $(r_d^*, r_c^*) = (r_{d_{min}}, r_{c_{min}})$

$$J_0 = r \frac{\gamma}{\sqrt{r}} + (r + \alpha)\sigma r_{d_{min}}^2 + \psi A - \varphi R - SE$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial r} = \frac{\gamma}{2\sqrt{r}} + \sigma r_{d_{min}}^2 = 0$$

Уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию (2).

Следовательно, равновесием является одна из пар стратегий:

$$(r_{min}, [r_{d_{min}}, r_{c_{min}}]), (r_{c_{min}} + C_o, [r_{d_{min}}, r_{c_{min}}])$$

2.  $r_{c_{min}} + C_o \leq r \leq r_{c_{max}} + C_o$

В этом случае  $(r_d^*, r_c^*) = \left(\frac{2 - 2C_o^*}{3(1 + \alpha)}, r + C_o\right)$

$$J_0 = r \frac{\gamma}{\sqrt{r}} + (r + \alpha) \sigma \left( \frac{2 - 2Co^*}{3(1 + \alpha)} \right)^2 + \psi A - \varphi R - SE$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial r} = \frac{\gamma}{2\sqrt{r}} + \sigma \left( \frac{2 - 2Co^*}{3(1 + \alpha)} \right)^2 = 0$$

Уравнение не имеет вещественных решений. Следовательно, равновесием является одна из пар стратегий  $\left( r_{c_{min}} + Co, \left[ \frac{2-2Co^*}{3(1+\alpha)}, r + Co \right] \right), \left( r_{c_{max}} + Co, \left[ \frac{2-2Co^*}{3(1+\alpha)}, r + Co \right] \right)$

$$3. r_{c_{max}} + Co \leq r \leq r_{max}$$

В этом случае  $(r_d^*, r_c^*) = (r_{d_{max}}, r_{c_{max}})$ . Случай аналогичен первому и равновесием является одна из пар стратегий  $(r_{c_{max}} + Co, [r_{d_{max}}, r_{c_{max}}]), (r_{max}, [r_{d_{max}}, r_{c_{max}}])$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-31-90041*

### Литература

1. Пильник Н. П., Радионов С. Я., Языков А. А. Модель оптимального поведения современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22 № 3. С. 418-447
2. Полякова А. А., Кожанчикова Н. Ю. Проблемы становления и развития банковской системы России // Среднерусский вестник общественных наук. 2016. Т. 11 №6 с. 326-332
3. Казимагомедов А. А. Банковское дело: организация деятельности центрального и коммерческого банка, небанковских организаций. Инфра-М. 2017. С. 203.
4. Новиков А. М. Номинальная и эффективная процентные ставки как

- измерители цены кредита // Финансы и кредит. 2008. №28. С. 1-4
5. Магдесян В. А., Усов А. Б. Информационно-аналитическая система управления взаимодействием центрального и коммерческого банков // Инженерный вестник Дона. 2017 №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4376
6. Крепцев Д., Селезнев С. DSGE-модель российской экономики с банковским сектором // Центральный банк Российской Федерации. Серия докладов об экономических исследованиях. 2017. № 27.
7. Bikker J.A., Vervliet T.M. Bank profitability and risk-taking under low interest rates. International Journal of Finance and Economics, 2017, Vol. 23, №1. URL: onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/ijfe.1595
8. Zhang, W., S. Zhao and X. Wan, 2021. Industrial digital transformation strategies based on differential games. Applied Mathematical Modelling, 98. URL: doi.org/10.1016/j.apm.2021.05.001.
9. Кораблина Э. В., Усов А.Б. Равновесие Штакельберга в модели согласования частных и общественных интересах // Инженерный вестник Дона, 2019, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5516
10. Угольницкий Г.А. Теоретико-игровые принципы оптимальности иерархического управления устойчивым развитием // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. №4. С.88-94.

### References

1. Pil'nik N. P., Radionov S. Ya., Yazykov A. A. Ekonomicheskii zhurnal VShE. 2018. T. 22 № 3. Pp.418-447.
2. Polyakova A. A., Kozhanchikova N. Yu. Srednerusskii vestnik obshchestvennykh nauk. 2016. T. 11 №6. pp.326-332
3. Kazimagomedov A. A. Bankovskoe delo: organizaciya deyatelnosti central'nogo i kommercheskogo banka, nebankovskih organizacij. [Banking: organization of the activities of the central and commercial banks, non-banking organizations]. Infra M. 2017. P.203.
4. Novikov A. M Finansy i kredit. 2008. №28. pp. 1-4.
-



5. Magdesyan V. A., Usov A. B. Inzhenernyj vestnik Dona, 2017, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4376](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4376)
6. Kreptsev D., Seleznev S. Tsentral'nyi bank Rossiiskoi Federatsii. Seriya dokladov ob ekonomicheskikh issledovaniyakh. 2017. № 27.
7. Bikker J.A., Vervliet T.M. International Journal of Finance and Economics, 2017, Vol. 23, №1. URL: [onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/ijfe.1595](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/ijfe.1595)
8. Zhang, W., S. Zhao and X. Wan, 2021. Applied Mathematical Modelling, 98. URL: [doi.org/10.1016/j.apm.2021.05.001](https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.05.001).
9. Korablina E. V., Usov. A.B. Inzhenernyj vestnik Dona, 2019, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5516](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5516)
10. Ugol'nitskii G.A. Izv. RAN. TiSU. 2005. №4. pp.88-94.