

Алгоритм реализации оптимального оператора фильтрации с прогнозом по его синтезированной математической модели для L-марковского процесса с квазирациональным спектром

А.Н.Титов¹, Л.Ю. Фадеева²

¹Казанский национальный исследовательский технологический университет – КНИТУ

²Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Аннотация: Построена математическая модель, разработан алгоритм и составлена программа на языке программирования Python для расчета численных значений оптимального оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса с квазирациональным спектром. Вероятностная модель формулы оператора фильтрации получена на основе спектрального анализа L-марковских процессов с привлечением методов вычисления стохастических интегралов, теории аналитических функций комплексного переменного и методов корреляционно – регрессионного анализа. Рассмотрен пример L-марковского процесса, значения оптимального оператора фильтрации с прогнозом для которого удалось выразить в виде линейной комбинации значений процесса в некоторые моменты времени и суммы численных значений косинусов и синусов в те же моменты. Основой для получения численных значений оператора фильтрации послужила математическая модель тригонометрической регрессии с 16-ю гармониками, наилучшим образом аппроксимирующая исследуемый процесс и имеющая минимальную стандартизованную ошибку аппроксимации среди всех построенных тригонометрических регрессий. Построен график зависимости оператора фильтрации с прогнозом от времени прогноза t . Найдено критическое значение срока упреждения t , сверх которого прогноз становится некорректным и ненадежным. Дана физическая интерпретация полученных результатов фильтрации с прогнозом.

Ключевые слова: случайный процесс, L-марковский процесс, фильтрация с прогнозом, спектральная характеристика, оператор фильтрации.

Введение. Реализация оптимального оператора фильтрации в современных условиях активно развивающихся цифровых технологий является актуальной задачей. Фильтрация сигнала представляет собой неотъемлемую часть обработки данных и активно используется в системах прогнозирования в адаптивной фильтрации, поскольку в её результате повышается достоверность измерений и снижается количество ложных срабатываний [1]. Такие методы особенно актуальны в автоматизированных

системах на производстве, где измерения, как правило, нестабильны, сильно зашумлены, в силу чего предвидение критических и аварийных ситуаций становится проблематичным. В промышленности используется широкий спектр датчиков для контроля и управления процессами, обеспечивая безопасность, эффективность и соответствие стандартам. Все они предназначены для обработки сигналов, многие содержат встроенные фильтры и интегрируются в автоматизированные системы управления, обеспечивающие дистанционный контроль. В подобных системах применяется адаптивная фильтрация с изменяемыми параметрами. Алгоритмы адаптивной фильтрации строятся, как правило, на основе метода наименьших квадратов, либо на базе рекурсивных методов, основной задачей которых является минимизация ошибок между значениями входного сигнала и значениями аппроксимирующей его функции [2-4]. Решение задачи фильтрации с прогнозом будет способствовать повышению контроля за состоянием оборудования и позволит предсказывать будущее состояние системы.

Сигналы с датчиков оборудования имеют стохастический характер и, вследствие распространения в неоднородных или в слоистых средах (погодные условия, наличие переотражений ввиду многолучевой интерференции и т.п.), приобретают сложную структуру, описывать которую известными математическими методами крайне затруднительно. В работе представлена математическая модель сигнала, в которой присутствуют частотнозависимые коэффициенты, определяемые свойствами среды, а также соответствующие задержке сигнала вследствие переотражения и затухания. Такая структура сигнала характерна, например, для моделей в линии электропередач и связи с неоднородностями, либо в многослойной среде с внутренними границами.

Целью данной работы является построение алгоритма расчета численного значения оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса с квазирациональным спектром и его программная реализация.

Методы решения задачи. Явные формулы экстраполяции известны лишь для некоторых классов стационарных процессов с нерациональными спектральными плотностями [5,6], однако явные формулы фильтрации и интерполяции для процессов с нерациональным спектром практически неизвестны.

В данной работе построен оператор фильтрации для процессов $\rho(s)$ с квазирациональным спектром вида:

$$f_{\rho\rho}(\omega) = 1 / \left| \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \right|^2, \quad (1)$$

где $Q_k(\omega)$ – многочлены степени q_k ; g_k – действительные числа:

$g_0 = 0 < g_1 < g_2 < \dots < g_m$ и все корни квазиполинома $G(\omega) = \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k}$

расположены в открытой верхней полуплоскости H^+ .

В формуле (1) степени q_k многочленов $Q_k(\omega)$ связаны неравенствами $q_0 \geq q_k$ при всех $k = 1, 2, \dots, m$, кроме того, для интегрируемости спектральной плотности $f_{\rho\rho}(\omega)$ вида (1) необходимо также выполнение неравенства $q_0 \geq 1$.

Постановка задачи фильтрации: требуется восстановить значения передаваемого сигнала $\xi(s)$ в момент $t+\tau$ ($\tau > 0$ – фильтрация с прогнозом, $\tau < 0$ – фильтрация с запаздыванием) по известным в прошлом (т.е. при $s \leq t$) значениям принимаемого сигнала $\rho(s) = \xi(s) + \eta(s)$ с квазирациональной спектральной плотностью вида (1). Сигналы $\xi(s)$ и $\rho(s)$ предполагаются стационарными, а стационарный процесс $\eta(s)$ (случайный шум) – имеющим нулевое среднее значение $M\eta(s) = 0$. Взаимная спектральная плотность $f_{\xi\eta}(\omega)$ $\xi(s)$ и $\eta(s)$ процессов предполагается рациональной функцией вида:

$$f_{\xi\rho}(\omega) = 1 / |S(\omega)|^2, \quad (2)$$

где $S(\omega)$ – многочлен степени n .

Задача фильтрации может быть сформулирована также на языке аналитических функций комплексного переменного следующим образом: требуется построить наилучшую линейную оценку вида:

$$\tilde{\xi}(t + \tau) = L \{ \rho(t - s), s \geq 0 \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{\tau}(\omega) dZ(\omega), \quad (3)$$

где L – линейный оператор фильтрации, $\Phi_{\tau}(\omega)$ – спектральная характеристика фильтрации, $Z(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными приращениями из спектрального представления передаваемого сигнала

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega). \quad (4)$$

Процессы с квазирациональной спектральной плотностью (1) расширяют класс процессов с рациональным спектром, а также представляют собой подкласс L -марковских процессов относительно семейства полубесконечных интервалов на прямой $L = [-g_m/2; g_m/2]$ [5], так как $[f_{pp}(\omega)]^{-1}$ представляет собой функцию экспоненциального типа, что, согласно теореме Левинсона – Маккина [7] является достаточным условием L -марковости процесса со спектральной плотностью $f_{pp}(\omega)$ вида (1).

Нахождение наилучшей оценки (3) заключалось в выводе формулы для спектральной характеристики фильтрации $\Phi_{\tau}(\omega)$ в соответствии с известными требованиями А. Яглома [5], удовлетворяя которые, авторы получили в работе [8] спектральную характеристику фильтрации с прогнозом для процесса $\rho(s)$ со спектральной плотностью (1) в виде:

$$\Phi_{\tau}(\omega) = [P_0(\omega) \cdot G(\omega)] / S(\omega) = \left[P_0(\omega) \cdot \sum_{k=0}^m Q_k(\omega) e^{-i\omega g_k} \right] / S(\omega) \quad (5)$$

где $P_0(\omega)$ – многочлен степени $n - 1$ (n – степень $S(\omega)$).

В той же работе [8] был рассмотрен важный для технических приложений (радиолокация, методы контроля неоднородных сред,

автоматизация измерений) пример с частным случаем спектральной плотности (1) вида:

$$f_{\text{pp}}(\omega) = 1/|V(\omega)|^2 = 1/|V_0(\omega) + V_1(\omega)e^{-i\omega} + V_2(\omega)e^{-2i\omega}|^2, \quad (6)$$

где $V_0(\omega) = \omega(b - c)i + d\omega + a - c - id = A\omega + B$; $V_1(\omega) = 2a$;

$V_2(\omega) = \omega(d - ci - bi) + a + c + di = C\omega + D$, $A = d + i(b - c)$; $B = a - c - id$; $C = d - ci - bi$; $D = a + c + di$, а на действительные числа a, b, c и d наложены ограничения:

$$b > a > 0, \quad c > 0, \quad d > 0. \quad (7)$$

Неравенства (7) обеспечивают принадлежность всех корней квазиполинома $V(\omega) = V_0(\omega) + V_1(\omega)e^{-i\omega} + V_2(\omega)e^{-2i\omega}$ верхней полуплоскости, что доказано авторами в работе [9] с помощью метода Штурма.

Совместная спектральная плотность процессов $\rho(s)$ и $\xi(s)$ является рациональной функцией вида

$$f_{\xi\rho}(\omega) = 1/|S(\omega)|^2 = 1/(\omega^2 + \gamma^2), \quad (8)$$

где $\gamma > 0$.

В работе авторов [9] доказано, что спектральная характеристика фильтрации с прогнозом задается формулой

$$\Phi_\tau(\omega) = [\alpha \cdot V(\omega)]/[\omega - \gamma i] \quad (9)$$

где $S(\omega) = \omega - \gamma i$, $\gamma > 0$,

$$\alpha = -[e^{-\gamma\tau}/(2\gamma)] [\bar{B}i - \bar{A}\gamma + 2aie^{-\gamma} + (\bar{D}i - \bar{C}\gamma)e^{-2\gamma}], \quad (10)$$

а оптимальный оператор фильтрации с прогнозом можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = \alpha [A\rho(t) + C\rho(t - 2)] + \sum_{j=0}^2 F_j \int_0^\infty e^{-\gamma s} \rho(t - s - j) ds, \quad (12)$$

$$\text{где} \quad F_0 = \alpha(Bi - A\gamma); \quad F_1 = 2a\alpha i; \quad F_2 = \alpha(Di - C\gamma). \quad (13)$$

Чтобы получить численное значение оптимального оператора фильтрации с прогнозом, недостаточно задать параметры $a, b, c, d, A, B, C, D, t$ и τ , как это видно из формулы (12), поскольку во второй, интегральной

части этой формулы в подынтегральном выражении присутствует принимаемый сигнал $\rho(s)$, явная формула которого неизвестна и потому интеграл вида $\int_0^\infty e^{-\gamma s} \rho(t-s-j) ds$ не удастся вычислить аналитическими методами. Однако, имея график принимаемого сигнала, полученный, например, с осциллографа или анализатора спектра (в нашем случае смоделированный), его можно оцифровать с необходимой нам точностью и тем самым получить принимаемый сигнал $\rho(s)$ в табличном виде. На практике оцифровку осуществляют современные приборы, сразу переводящие исходные данные в «в цифру» и подвергающие их дальнейшей обработке по заданному алгоритму.

В результате получают табличную функцию, в которой аргументами будут периоды (моменты времени), а функцией – соответствующие им значения сигнала. При этом расстояния между моментами времени, а, следовательно, и между значениями сигнала можно выбрать в соответствии с требованиями исследования.

Далее, используя полученную таблицу с данными, можно аппроксимировать сигнал методом наименьших квадратов одним из трендов: параболическим, тригонометрическим, логистическим, гиперболическим, экспоненциальным и т.п. По наименьшей стандартизованной ошибке аппроксимации СОА:

$$COA = \sqrt{\sum_{j=0}^{r-1} [\rho_{факт}(v_j) - \hat{\rho}_{теор}(v_j)]^2 / r}, \quad (14)$$

где r – число моментов наблюдения сигнала, из всех трендовых моделей выбираем наилучшую.

Как показывает опыт и практика исследований в области радиофизики и радиотехники, а также вид графика принимаемого сигнала, такой наилучшей статистической моделью по критерию минимальности СОА

оказывается, как правило, модель тригонометрической регрессии с N гармониками вида:

$$\rho_{теор}(v) = \hat{\rho}(v) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kv + b_k \sin kv). \quad (15)$$

Коэффициенты a_0 , a_k и b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$ находятся по формулам [10]:

$$a_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) / r; \quad a_k = \left(\frac{2}{r} \right) \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) \cos kt_j; \quad b_k = \left(\frac{2}{r} \right) \sum_{j=0}^{r-1} \rho(t_j) \sin kt_j, \quad (16)$$

где t_j – точки дискретизации сигнала.

Число гармоник N подбирается таким образом, чтобы СОА (N) было минимальным. Обозначим это оптимальное число гармоник $\tilde{N} = N_{\min_COA} = N_{opt}$.

Подставляя формулу (15) тригонометрической регрессии в формулу (12) оптимального оператора фильтрации с прогнозом, где a_0 , a_k , и b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, r-1$ вычисляются по формулам (16) и $N = \tilde{N}$ и, проведя предварительно в интеграле $\int_0^\infty e^{-\gamma s} \rho(t-s-j) ds$ замену $(t-s-j) = x$, получим:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma s} \cdot \rho(t-s-j) ds = \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{k=1}^N a_k \left[\frac{k \sin k(t-j) + \gamma \cos k(t-j)}{k^2 + \gamma^2} \right] + \sum_{k=1}^N b_k \left[\frac{\gamma \sin k(t-j) - k \cos k(t-j)}{k^2 + \gamma^2} \right].$$

Таким образом, оптимальный линейный оператор фильтрации с прогнозом примет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; \tau) = L \{ \rho(t-s), s \geq 0 \} = & \alpha \cdot [A\rho(t) + C\rho(t-2)] + \frac{a_0}{\gamma} (F_0 + F_1 + F_2) + \\ & + \sum_{j=0}^2 F_j \left\{ a_k \left[\frac{k \sin k(t-j) + \gamma \cos k(t-j)}{k^2 + \gamma^2} \right] + b_k \left[\frac{\gamma \sin k(t-j) - k \cos k(t-j)}{k^2 + \gamma^2} \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Результаты работы. Авторами составлена программа нахождения оптимального оператора фильтрации с прогнозом τ при любом $\tau > 0$ и при следующих значениях параметров спектральной плотности (6): $c = 0,1 > 0$; $d = 5 > 0$; $a = 0,5$; $b = 0,6$; $\gamma = 2 > 0$; $t = \pi > 0$; $N = \tilde{N} = N_{\min_COA} = N_{opt} = 16$; $r = 4657$.

Предположения $b > a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ обязательны, так как обеспечивают принадлежность корней квазиполинома $V(\omega)$ к верхней полуплоскости.

Программа составлена на языке программирования Python с применением библиотек NumPy, Matplotlib и Pandas. Все расчеты выполнены в среде разработки Jupyter Notebook.

Исходные данные принимаемого сигнала $p(v)$ были получены с помощью виртуального прибора, выполненного в среде NI LabVIEW, генерирующего принимаемый сигнал с шумом по его спектральной плотности (6) с заданными выше параметрами a , b , c , d .

Исходя из вида графика исследуемого сигнала, в качестве аппроксимирующей функции был выбран тригонометрический полином (15), где коэффициенты a_0 , a_k , и b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$ определены выше. Интервал изменения аргументов $(0; 38,0725)$. Аргументы (точки) t_j исходного интервала были преобразованы в точки v_j интервала $[-\pi; \pi]$ с помощью линейного преобразования $v_j = \frac{2\pi \cdot t_j}{38,0725} - \pi$.

Построив тригонометрические тренды (15), содержащие $N = 1, 2, 3 \dots 24$, 100 гармоник и рассчитав их стандартизованные ошибки аппроксимации COA по формуле (14), обнаружим, что при $N \leq 13$ значения COA соответствующих трендов будут лежать в интервале $5 \leq COA \leq 6$.

Далее, построив график зависимости COA от числа гармоник N (Рис.1) для $N = 1, 2, 3 \dots 24$, увидим, что, стандартизованная ошибка аппроксимации COA монотонно убывает с ростом N и уменьшается при $N > 13$ почти в 6 раз по сравнению с COA при $N \leq 13$: $COA(13) = 5,86$; $COA(14) = 1,08$. Установив допустимую погрешность ошибки COA в $\varepsilon = 10^{-2}$, обнаружим, что уже при $N = 16$ и $N = 17$ $COA(16) = 1,0389$ и $COA(17) = 1,0371$ будут отличаться на величину 0,0018, то есть меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-2}$. Поэтому в качестве оптимального N было взято $\tilde{N} = 16$. Найдены коэффициенты

тригонометрического тренда при оптимальном $\tilde{N} = 16$. На Рис.2. представлен принимаемый сигнал $\rho(v)$ и аппроксимирующий его тригонометрический тренд.

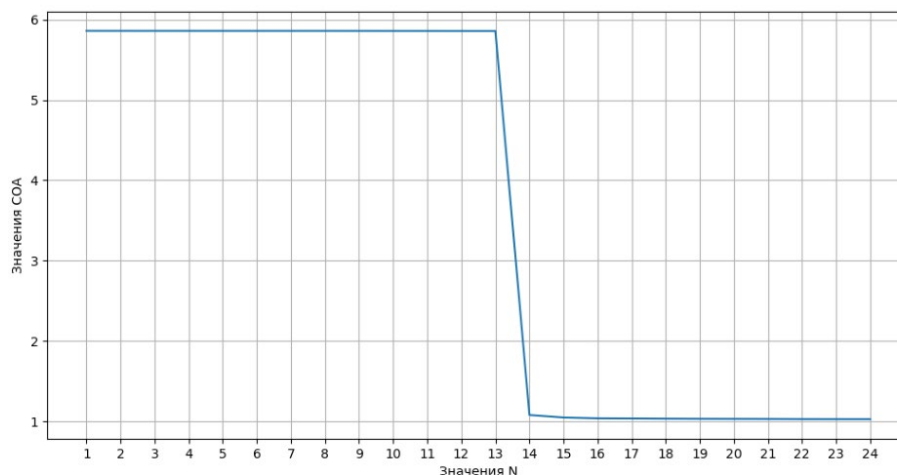


Рис.1. Зависимость стандартизированной ошибки аппроксимации (COA) от числа гармоник N .

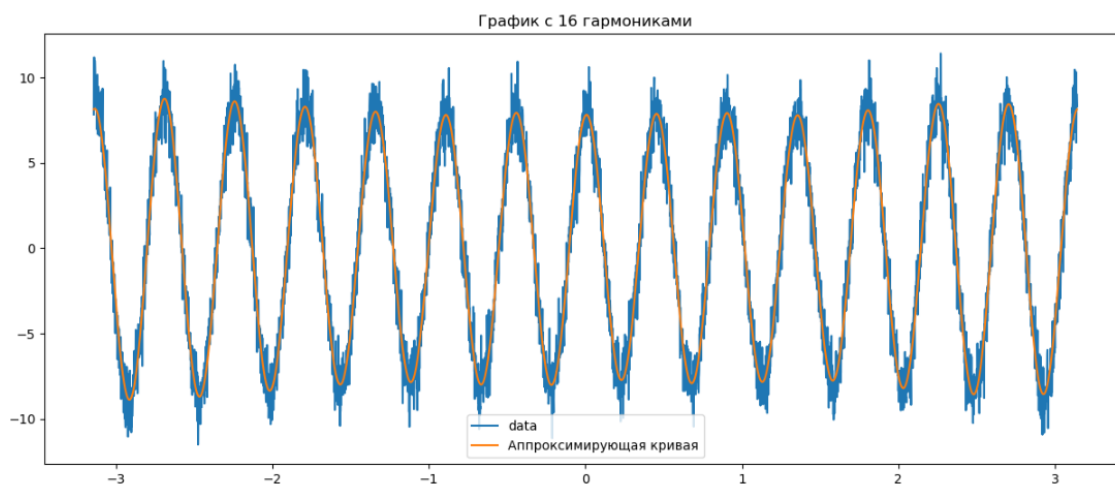


Рис. 2. Принимаемый сигнал $\rho(v)$ и аппроксимирующий его тригонометрический тренд с 16-ю гармониками.

Расчеты по формуле (17) показали, что при $N = 16$, $r = 4657$ численное значение оптимального линейного оператора фильтрации с прогнозом $\tau = 1,3 > 0$, например, равно комплексному числу $\tilde{\xi}(\pi; 1,3) = 1,474 + 2,286i$, а со сроком упреждения $\tau = 2$ дает комплексное значение $\tilde{\xi}(\pi; 2) = 0,36 + 0,56i$.

Таблица

Действительные и мнимые значения оптимального оператора фильтрации с прогнозом

τ	$\text{Re}\xi$	$\text{Im}\xi$	τ	$\text{Re}\xi$	$\text{Im}\xi$	τ	$\text{Re}\xi$	$\text{Im}\xi$	τ	$\text{Re}\xi$	$\text{Im}\xi$
0,1	16,25	25,20	0,9	3,28	5,09	1,7	0,66	1,03	2,5	0,13	0,21
0,2	13,30	20,63	1	2,69	4,17	1,8	0,54	0,84	2,6	0,11	0,17
0,3	10,89	16,89	1,1	2,20	3,41	1,9	0,44	0,69	2,7	0,09	0,14
0,4	8,92	13,83	1,2	1,80	2,79	2	0,36	0,56	2,8	0,07	0,11
0,5	7,30	11,32	1,3	1,47	2,29	2,1	0,30	0,46	2,9	0,06	0,09
0,6	5,98	9,27	1,4	1,20	1,87	2,2	0,24	0,38	3	0,05	0,08
0,7	4,89	7,59	1,5	0,99	1,53	2,3	0,20	0,31	3,1	0,04	0,06
0,8	4,01	6,21	1,6	0,81	1,25	2,4	0,16	0,25	3,2	0,03	0,05

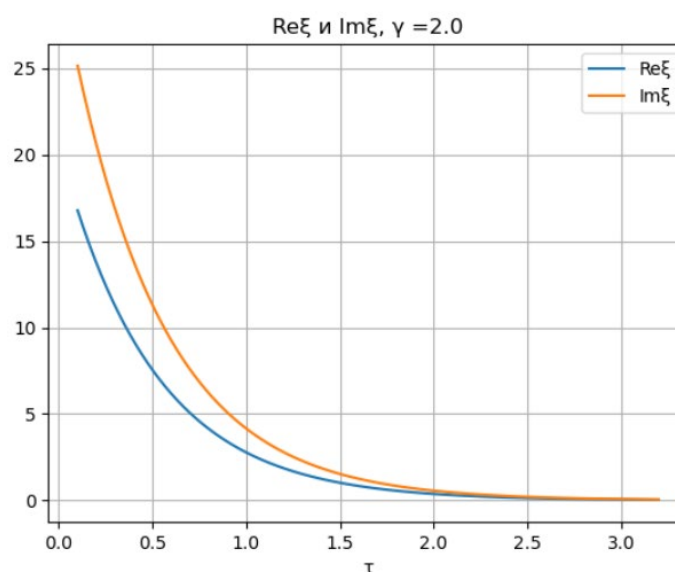


Рис. 3. Действительные и мнимые значения оптимального оператора фильтрации с прогнозом

Действительная часть оператора фильтрации дает амплитудно – частотную характеристику полезного, передаваемого сигнала $\xi(\nu)$, а мнимая часть – его фазо-частотную характеристику.

Очевидно, что аналогичные результаты получим при любом $t \in R$ и любом сроке упреждения $\tau > 0$, не превосходящем одной трети базы прогноза.

Как известно из теории прогнозирования [10], для того, чтобы прогноз был корректным и надежным, необходимо, чтобы срок упреждения τ составлял не более одной трети базы прогноза, т.е. от длины интервала, по которому строится прогноз. Поскольку база прогноза у нас – это интервал $[-\pi; \pi]$, на котором задан принимаемый сигнал, то база прогноза составит $2\pi = 6,28$, поэтому прогнозирование целесообразно закончить сроком упреждения $\tau = 2,1$.

В работе построено комплексное поле зависимости оптимального оператора фильтрации с прогнозом $\tilde{\xi}(\pi; \tau)$ от времени упреждения τ , которое представлено на рис.4., По осям OX и OY отложены действительная и мнимая части оператора фильтрации $\tilde{\xi}(\pi; \tau)$, а по оси OZ отложено время упреждения τ . Значение t – момента времени, до которого известны значения исследуемого L-марковского процесса, считается равным π . Шаг изменения параметра τ принят равным $h = 0,1$.

Первой точкой в трехмерном пространстве $R^3 = (\text{Re} \tilde{\xi}(\pi + \tau); \text{Im} \tilde{\xi}(\pi + \tau); \tau)$ на этом графике является точка с координатами $(\text{Re} \tilde{\xi}(\pi + 0,1); \text{Im} \tilde{\xi}(\pi + 0,1); 0,1) = (16,25; 25,20; 0,1)$, а последней, корректной для прогноза точкой, соответствующей значению $\tau = 2,1$, – точка $\Theta(0,30; 0,46; 2,1)$.

Назовем точку Θ критической точкой. Отметим, что для наглядности рис.4 заканчивается сроком упреждения $\tau = 3,2$; а критическая точка Θ обозначена на этом рисунке звездочкой.

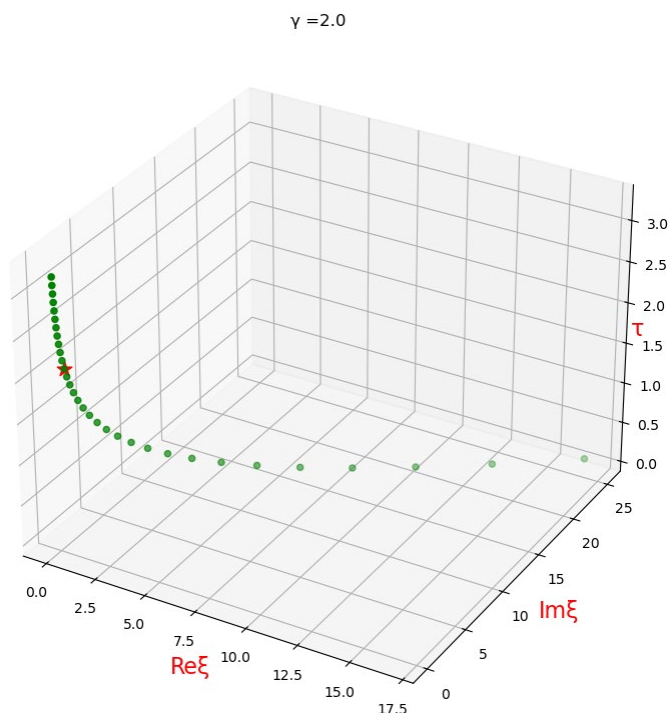


Рис.4. График зависимости оптимального оператора фильтрации с прогнозом от времени упреждения τ и критическая точка

Анализ графиков, представленных на рис.3 и рис.4, а также таблицы приводит к заключению, что при всех $\tau \in [0,1;3,2]$ действительная и мнимая части оптимального оператора фильтрации с прогнозом являются положительными числами, при этом мнимая часть оператора превосходит действительную часть в 1,5 раза. С ростом срока упреждения τ действительная часть оператора убывает с 16,25, а его мнимая часть – с 25,20 до нуля.

Полученные результаты показывают, что вся энергия сигнала поглощается или рассеивается в среде, в которой сигнал распространяется, например, вследствие высоких потерь в проводящей среде (морская вода, металл), либо вследствие резонансного поглощения в диэлектрике (это характерно для СВЧ – материалов с высокой диэлектрической проницаемостью), либо при прохождении через толстый слой экранирующего материала с ферромагнитным слоем.

Такой сигнал имеет значительный фазовый сдвиг относительно действительной составляющей (порядка $56,3^0$), что отражает физические явления, связанные с фазовыми сдвигами при распространении сигнала в неоднородной среде, когда наблюдается поглощение, рассеяние, дисперсия и интерференция сигнала, например, в атмосфере, плазме; в анизотропных, фрактальных средах; в метаматериалах и т.д.

Разработанная авторами программа «Расчет значений оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью», очевидно, может быть применена для решения задачи фильтрации с прогнозом L-марковского сигнала при любых значениях параметров $b > a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ (условие (7)) и при любом сроке упреждения τ , не превосходящем числа $2\pi/3$.

Стоит отметить, что полученное численное значение оператора фильтрации, содержащее действительную и мнимую части, даёт наглядное представление об амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиках сигнала и влиянии на него среды, в которой он распространялся.

Заключение. Решена задача фильтрации с прогнозом для достаточно широкого класса L-марковских процессов, являющихся обобщением марковских процессов. Построена стохастическая модель оптимального оператора фильтрации с прогнозом для этого класса L-марковских процессов с квазирациональной спектральной плотностью, обобщающей рациональную. Рассчитаны числовые значения оптимального оператора фильтрации с прогнозом. Установлена связь между численными значениями действительной и мнимой частей оператора фильтрации, дано физическое объяснение полученным результатам. Определено критическое значение времени упреждения, сверх которого фильтрация с прогнозом становится некорректной и ненадежной. Найдено соответствующее численное значение оптимального оператора фильтрации с прогнозом. Результаты, полученные в

настоящей работе, могут найти применение в современных автоматизированных системах контроля и управления процессами с адаптивной фильтрацией.

Литература

1. Аксенов К.В., Алексеев В.П. Фильтрация цифровых сигналов в режиме непрерывного поступления данных. Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т.4.№1. С.55-61
2. Джиган В. Адаптивные фильтры и их приложения в радиотехнике и связи. Современная электроника. 2009. №9. С.56 – 63.
3. Акиншин Н.С., Петешов А.В., Румянцев В.Л., Хомяков К.А. Адаптивные алгоритмы оптимальной фильтрации сигнала. Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 69 – 79.
4. Приймак А.А. Реализация адаптации экстремальной фильтрации к реальному времени // Инженерный вестник Дона. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.
5. Yaglom A.M. An Introduction to the Teory of Stationaty Random Functions/ A.M. Yaglom; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.
6. Фадеева Л. Ю. Построение стохастической модели линейного экстраполятора для L-марковского фрактального процесса // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2025. № 1 (65). С. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.
7. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля // ДАН СССР, 1974, Т. 215, №5, 1974. С.1054-1057.
8. Фадеева Л.Ю. Построение вероятностной модели линейного оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса // Инженерный вестник Дона. 2025. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10311.

9. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. Т.4. №4 (2024): выпуск 14. С. 1-8.

10. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник / Под ред. Колемаева В.А. Серия «Высшее образование». М.: Инфра, 1997. 302с.

References

1. Aksenov K.V., Alekseev V.P. Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. 2012. Т.4.№1. pp.55-61.

2. Dzhigan V. Sovremennaja jelektronika. 2009. №9. pp.56 – 63.

3. Akinshin N.S., Peteshov A.V., Rumjancev V.L., Homjakov K.A. Tehnicheskie nauki. 2018. Vyp. 9. pp. 69 – 79.

4. Prijmak A.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9760.

5. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

6. Fadeeva L. Ju. Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta. Ser.: Radiotekhnicheskie i infokommunikacionnye sistemy. 2025. № 1 (65). p. 46–54. DOI: doi.org/10.25686/2306-2819.2025.1.46; EDN: RXISUS.

7. Molchan G.M. DAN SSSR, 1974, T. 215, №5, 1974. pp.1054-1057.

8. Fadeeva L. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10311.

9. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyj. Т.4. №4 (2024): vypusk 14. pp. 1-8.

10.Kolemaev V.A., Kalinina V.N. [Probability theory and mathematical statistics] М.: Infra, 1997. 302p.

Дата поступления: 8.08.2025

Дата публикации: 25.09.2025