

Экспериментальная оценка влияния скорости нагружения на деформативно-прочностные характеристики бетона класса В45 при центральном сжатии

С.В. Коуркин, А.И. Никулин

Белгородский Государственный Технологический Университет им. В.Г. Шухова

Аннотация: В статье представлены результаты экспериментального исследования влияния скорости нагружения на деформативно-прочностные характеристики бетона класса В45 при центральном сжатии. Испытаны 15 призм размером 100×100×400 мм, разделённых на три серии по скорости нагружения. Построены регрессионные зависимости, определены коэффициенты корреляции (до 0.9975) и детерминации (до 0.9950), подтверждающие высокую степень согласованности моделей с экспериментальными данными. Установлено, что увеличение скорости нагружения способствует росту прочности и уменьшению величины предельной относительной деформации бетона. Полученные зависимости могут быть использованы в качестве экспериментальной основы для построения нелинейной деформационной методики расчёта изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных конструкций из бетона рассматриваемого класса (В45), подверженных статическим и высокоскоростным воздействиям.

Ключевые слова: эксперимент, бетонные образцы, высокоскоростное нагружение, центральное сжатие, статистическая обработка результатов, метод наименьших квадратов, регрессионная кривая.

Введение

К числу основных методов интерпретации экспериментальных данных, полученных посредством прямых измерений и направленных на выявление возможных взаимосвязей между характеристиками исследуемой совокупности, относят: визуализацию, статистическую обработку, а также методы приближённого описания зависимостей (аппроксимацию).

Среди доступных статистических инструментов наибольшей информативностью обладает корреляционно-регрессионный подход, основанный на применении метода наименьших квадратов. Он объединяет в себе элементы дисперсионного анализа и статистическое подтверждение или опровержение принимаемых гипотез, в том числе осуществляя оценку значимости коэффициентов корреляции.

Ключевые цели этого метода заключаются в следующем:

- установление наличия взаимозависимости между параметрами выборки;
- оценка степени выраженности связи между признаками;
- идентификация признаков, выступающих в роли главного и зависимого;
- построение аналитической модели, описывающей зависимость результирующего признака от изменения факторного, с последующей оценкой параметров этой модели;
- верификация достоверности предложенной статистической зависимости на основе критериев значимости.

1. Результаты проведения физического эксперимента

Для проведения эксперимента и получения необходимых исходных данных было изготовлено 15 бетонных образцов класса прочности В45. Образцы были разделены на три серии по пять экземпляров в каждой. В качестве геометрической формы выбраны призматические элементы с размерами $100 \times 100 \times 400$ мм [1, 2].

Каждой серии соответствовал свой режим нагружения, различающийся по средней скорости нагружения образцов до разрушения [3-5]. Первая серия образцов подвергалась статическому испытанию с поэтапным увеличением нагрузки на 10% от предполагаемого предела прочности. При этом скорость нагружения поддерживалась на уровне, не превышающем 0,01 МПа/с.

Для второй серии образцов скорость нагружения определялась из условий достижения разрушения в минимально возможные сроки. Продолжительность нагружения составляла от 1 до 3 секунд, при средней скорости увеличения напряжений 12,5 МПа/с.

С целью анализа влияния скорости приложения нагрузки на напряжённо-деформированное состояние бетонных образцов при

центральной сжатии, третья серия образцов испытывалась в диапазоне времени разрушения от 8 до 12 секунд, при средней скорости нагружения 3,5 МПа/с.

Обобщённые результаты эксперимента представлены в таблицах № 1 - №3.

Таблица № 1

Напряженно-деформированное состояние бетонных образцов 1-ой серии
при статическом нагружении

Напря- жение σ , кПа	Порядковый номер образца				
	Относительные деформации в конце каждого этапа ε_0 , %				
	То же, после 10 мин выдержки на этапе ε_{10} , %				
	1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
0	<u>0,0000</u> 0,0000	<u>0,0000</u> 0,0000	<u>0,0000</u> 0,0000	<u>0,0000</u> 0,0000	<u>0,0000</u> 0,0000
3000	<u>0,0041</u> 0,0041	<u>0,0044</u> 0,0044	<u>0,0046</u> 0,0046	<u>0,0046</u> 0,0046	<u>0,0047</u> 0,0047
6000	<u>0,0079</u> 0,0079	<u>0,0090</u> 0,0090	<u>0,0091</u> 0,0091	<u>0,0093</u> 0,0093	<u>0,0091</u> 0,0091
9000	<u>0,0136</u> 0,0143	<u>0,0138</u> 0,0146	<u>0,0137</u> 0,0137	<u>0,0143</u> 0,0149	<u>0,0141</u> 0,0146
12000	<u>0,0193</u> 0,0198	<u>0,0194</u> 0,0209	<u>0,0190</u> 0,0190	<u>0,0202</u> 0,0218	<u>0,0193</u> 0,0213
15000	<u>0,0253</u> 0,0265	<u>0,0251</u> 0,0274	<u>0,0248</u> 0,0273	<u>0,0251</u> 0,0275	<u>0,0251</u> 0,0263
18000	<u>0,0310</u> 0,0351	<u>0,0313</u> 0,0328	<u>0,0317</u> 0,0335	<u>0,0322</u> 0,0336	<u>0,0313</u> 0,0324
21000	<u>0,0412</u> 0,0415	<u>0,0376</u> 0,0393	<u>0,0381</u> 0,0406	<u>0,0389</u> 0,0414	<u>0,0379</u> 0,0402
24000	<u>0,0469</u> 0,0483	<u>0,0454</u> 0,0483	<u>0,0461</u> 0,0483	<u>0,0466</u> 0,0493	<u>0,0454</u> 0,0489
27000	<u>0,0575</u> 0,0675	<u>0,0539</u> 0,0733	<u>0,0534</u> 0,0571	<u>0,0552</u> 0,0589	<u>0,0543</u> 0,0617
30000	<u>0,0713</u> 0,0775	= -	<u>0,0626</u> 0,0673	<u>0,0646</u> 0,0750	<u>0,0693</u> 0,0743
33000	= -	= -	<u>0,0728</u> 0,0946	<u>0,0778</u> 0,1045	= -

Таблица № 2

Напряженно-деформированное состояние бетонных образцов 2-ой серии
при непрерывном нагружении со средней скоростью увеличения
напряжений 12,5 МПа/с

Порядковый номер образца				
Напряжение σ , кПа				
Относительные деформации ε_0 , %				
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000
<u>4486</u> 0,0044	<u>6707</u> 0,0102	<u>7316</u> 0,0135	<u>7350</u> 0,0063	<u>7527</u> 0,0044
<u>9038</u> 0,0101	<u>9133</u> 0,0117	<u>10999</u> 0,0188	<u>9775</u> 0,0108	<u>11271</u> 0,0089
<u>14610</u> 0,0198	<u>13012</u> 0,0184	<u>13344</u> 0,0232	<u>13684</u> 0,0167	<u>14252</u> 0,0133
<u>20230</u> 0,0313	<u>18973</u> 0,0340	<u>15733</u> 0,0299	<u>18637</u> 0,0230	<u>17579</u> 0,0234
<u>22940</u> 0,0373	<u>21563</u> 0,0373	<u>21550</u> 0,0388	<u>21437</u> 0,0314	<u>21934</u> 0,0309
<u>25030</u> 0,0423	<u>25339</u> 0,0455	<u>25488</u> 0,0466	<u>24038</u> 0,0412	<u>24698</u> 0,0368
<u>29560</u> 0,0549	<u>27764</u> 0,0521	<u>28447</u> 0,0524	<u>26468</u> 0,0465	<u>28473</u> 0,0447
<u>32680</u> 0,0621	<u>32180</u> 0,0643	<u>32031</u> 0,0592	<u>29722</u> 0,0616	<u>34202</u> 0,0603
<u>34687</u> 0,0828	<u>36214</u> 0,0919	<u>36267</u> 0,0837	<u>31165</u> 0,0723	<u>38757</u> 0,0878

Статические испытания проводились с использованием гидравлического пресса модели «ПММ-125», в то время как скоростное нагружение реализовывалось с помощью универсальной испытательной установки «Hydraulic Universal Testing Machine» модели WEW-600. Деформации сжатия фиксировались с помощью цифровых индикаторов часового типа (ИЧЦ) модели LB-Q12 с шагом измерения 0,0005 мм, погрешностью 20 мкм и диапазоном измерения до 12 мм начиная с обнуленных показателей цифрового табло.

Таблица № 3

Напряженно-деформированное состояние бетонных образцов 3-ей серии
при непрерывном нагружении со средней скоростью увеличения
напряжений 3,5 МПа/с

Порядковый номер образца				
Напряжения σ , кПа				
Относительные деформации ε_0 , %				
1-ый	2-ой	3-ий	4-ый	5-ый
<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000	<u>0</u> 0,0000
<u>5117</u> 0,0023	<u>5322</u> 0,0033	<u>5376</u> 0,0023	<u>5218</u> 0,0038	<u>5570</u> 0,0049
<u>7936</u> 0,0071	<u>8193</u> 0,0111	<u>8487</u> 0,0071	<u>8395</u> 0,0109	<u>8923</u> 0,0119
<u>12802</u> 0,0176	<u>13009</u> 0,0203	<u>13435</u> 0,0147	<u>12594</u> 0,0191	<u>12672</u> 0,0184
<u>16645</u> 0,0255	<u>16999</u> 0,0245	<u>17110</u> 0,0215	<u>16986</u> 0,0248	<u>17570</u> 0,0257
<u>19521</u> 0,0309	<u>20538</u> 0,0315	<u>20691</u> 0,0282	<u>20420</u> 0,0301	<u>20487</u> 0,0313
<u>24265</u> 0,0456	<u>24783</u> 0,0412	<u>24693</u> 0,0370	<u>24862</u> 0,0404	<u>24362</u> 0,0397
<u>28045</u> 0,0545	<u>28198</u> 0,0516	<u>28128</u> 0,0463	<u>28165</u> 0,0485	<u>27951</u> 0,0481
<u>32113</u> 0,0706	<u>32191</u> 0,0688	<u>31965</u> 0,0595	<u>31994</u> 0,0641	<u>32088</u> 0,0628
<u>35666</u> 0,0976	<u>34211</u> 0,0888	<u>34211</u> 0,0850	<u>34595</u> 0,0935	<u>36047</u> 0,1064

2. Корреляционно-регрессионный анализ полученных данных

Для построения уравнения регрессии было использовано одно из фундаментальных свойств регрессионного анализа [6-8]: среди множества всех возможных действительных функций наименьшее значение математического ожидания квадрата отклонений $M([Y - f(x)]^2)$ достигается на функции регрессии $f(x) = \bar{y}(x)$.

Учитывая, что для наиболее точного описания поведения бетона при нагружении необходима полиномиальная кривая второго порядка, то в качестве регрессионной зависимости выбрана параболическая функция, представленная в виде формулы (1):

$$\bar{y}(x) = a + bx + cx^2, \quad (1)$$

где параметры a , b и c являются неизвестными коэффициентами, определяемыми с использованием метода наименьших квадратов по формуле (2):

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - (a + bx + cx^2))^2 n_{xi} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Минимум функции $S(a, b, c)$ достигается при таких значениях параметров a , b и c , которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} na + b \sum x + c \sum x^2 = \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 = \sum yx \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 = \sum yx^2 \end{cases}, \quad (3)$$

Полученная система в матричном представлении имеет вид:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum yx \\ \sum yx^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\bar{X}$ - исходная матрица, а $\bar{Y}$ - свободные члены.

Определение неизвестных параметров уравнения регрессии a , b и c осуществляется методом определителей (за счет деления соответствующих частных определителей Δa , Δb и Δc на главный определитель Δ), что отражено в формуле (5):

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; b = \frac{\Delta b}{\Delta}; c = \frac{\Delta c}{\Delta}, \quad (5)$$

где Δa , Δb , и Δc - определители матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$, соответственно. Эти матрицы формируются на основе исходной матрицы $\bar{X}$ путём

последовательной замены каждого i -го столбца исходной матрицы на столбец матрицы свободных членов $\bar{Y}$, по циклу от 1 до n , как указано далее:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} \sum y & \sum x & \sum x^2 \\ \sum yx & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum yx^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{pmatrix}; & \bar{B} &= \begin{pmatrix} n & \sum y & \sum x \\ \sum x & \sum yx & \sum x^2 \\ \sum x^2 & \sum yx^2 & \sum x^3 \end{pmatrix}; \\ \bar{C} &= \begin{pmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum yx \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum yx^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (6)$$

Вычисление определителя исходной матрицы Δ , а также определителей модифицированных матриц Δa , Δb , и Δc может быть выполнено одним из трёх общепринятых способов: с использованием формул Крамера, на основе матричного исчисления или методом Гаусса.

При обработке экспериментальных данных в качестве факторного признака «X» принимаются относительные деформации бетона ε , %. В качестве же результативного признака «Y» - нормальные напряжения сжатия в бетоне σ , кПа.

Рассмотрим определение параметров a , b и c для уравнения регрессии образцов первой серии. Объемные вычисления второстепенных параметров $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum x^3$, $\sum x^4$, $\sum y$, $\sum yx$ и $\sum yx^2$ производились в Excel [9] и в статье не отражаются.

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 61,00 & 2,057 & 0,111 \\ 2,057 & 0,111 & 0,007 \\ 0,111 & 0,007 & 0,0005 \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} 1014000 \\ 49938,7 \\ 3048,74 \end{pmatrix}; \Delta = 0,000084;$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1014000 & 2,057 & 0,111 \\ 49938,70 & 0,111 & 0,007 \\ 3048,74 & 0,007 & 0,0005 \end{pmatrix}; \Delta a = 0,01066;$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 61,00 & 1014000 & 0,111 \\ 2,057 & 49938,7 & 0,007 \\ 0,111 & 3048,74 & 0,0005 \end{pmatrix}; \Delta b = 57,2775;$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 61,00 & 2,057 & 1014000 \\ 2,057 & 0,111 & 49938,70 \\ 0,111 & 0,007 & 3048,74 \end{pmatrix}; \Delta c = -299,2724;$$

$$a = \frac{0,01066}{0,000084} = 126,7097; b = \frac{57,2775}{0,000084} = 68069,9778; c = \frac{-299,2724}{0,000084} = -3556471,8871.$$

Неизвестные параметры для образцов второй и третьей серий были определены с использованием той же регрессионной методики, что и для первой серии. В результате для каждой серии были получены индивидуальные уравнения регрессии, отражающие взаимосвязь между рассматриваемыми переменными (таблица № 4).

Таблица № 4

Полученные уравнения регрессии

Серия образцов	Параболическая функция второго порядка
1-ая	$\bar{y}(x) = 126,7097 + 680669,9778x - 3556471,8871x^2$
2-ая	$\bar{y}(x) = 1466,1771 + 704393,48x - 350433,2871x^2$
3-я	$\bar{y}(x) = 1609,7953 + 723194,4595x - 3891559,2302x^2$

Статистические данные были визуализированы в графической форме путём аппроксимации экспериментальных точек с использованием регрессионных кривых, построенных на основе диаграмм рассеяния, что позволило наглядно отразить выявленные зависимости [10]. Соответствующие графики представлены на рис. 1–3.

После составления уравнений регрессии проводится анализ зависимости результативного признака «Y» от факторного признака «X», а также определяется степень выраженности данной зависимости посредством вычисления теоретического корреляционного отношения (7) на основе оценки факторной, остаточной и общей дисперсий (8), (9). Факторная дисперсия результативного признака «Y» отразит его вариацию исключительно влиянием факторного признака «X». Общая дисперсия,

представляющая собой сумму факторной и остаточной дисперсий, объясняет совокупное воздействие всех факторов на вариацию признака «Y» [11-12].

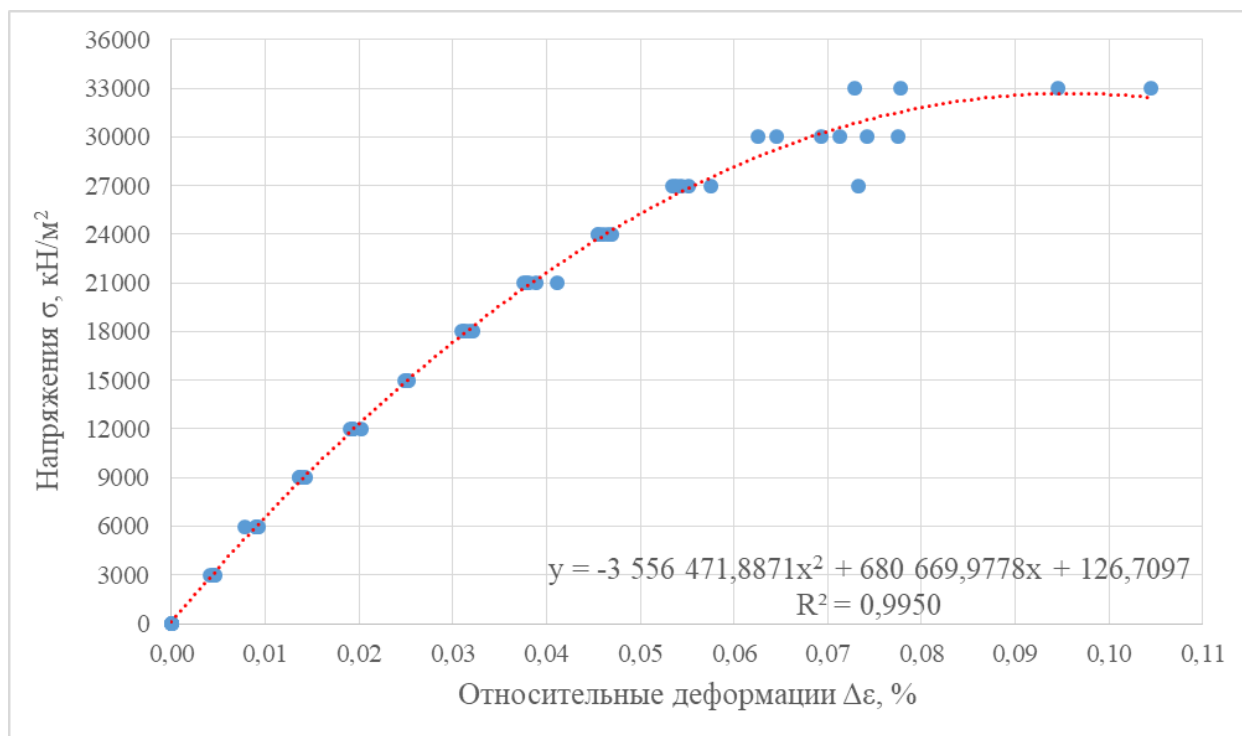


Рис. 1. – Линия регрессии образцов первой серии

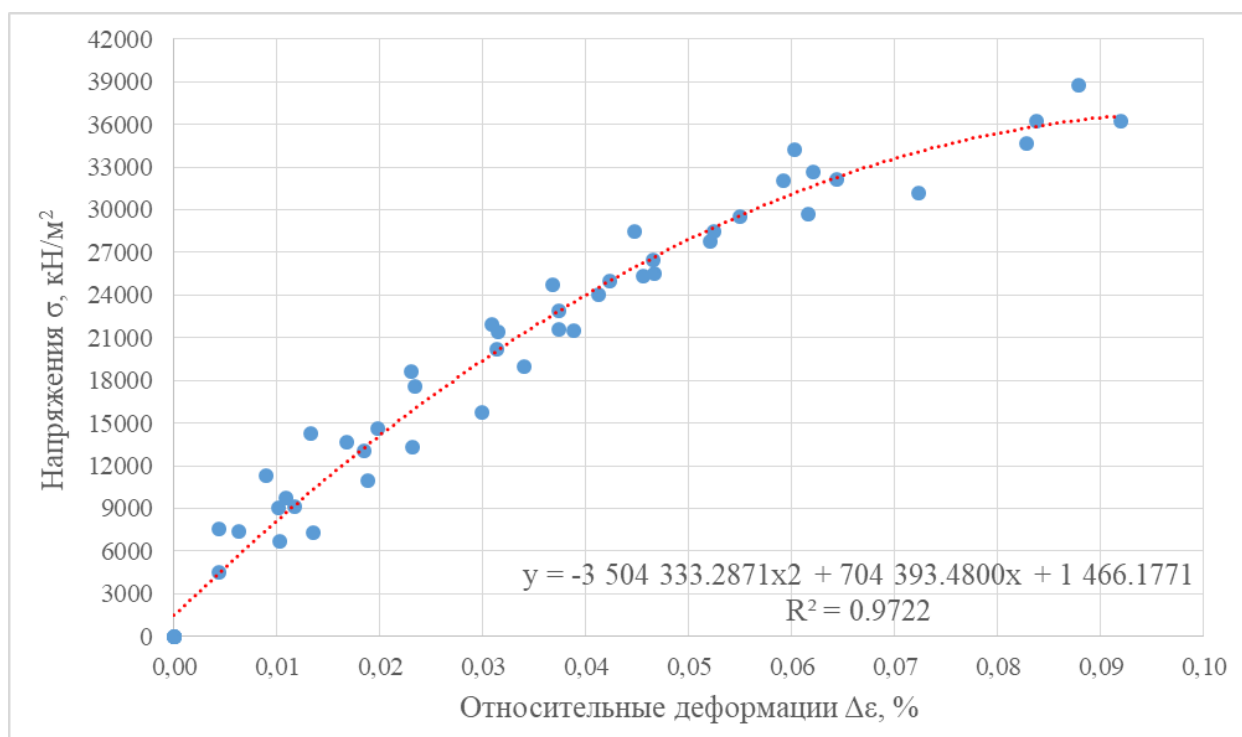


Рис. 2. – Линия регрессии образцов второй серии

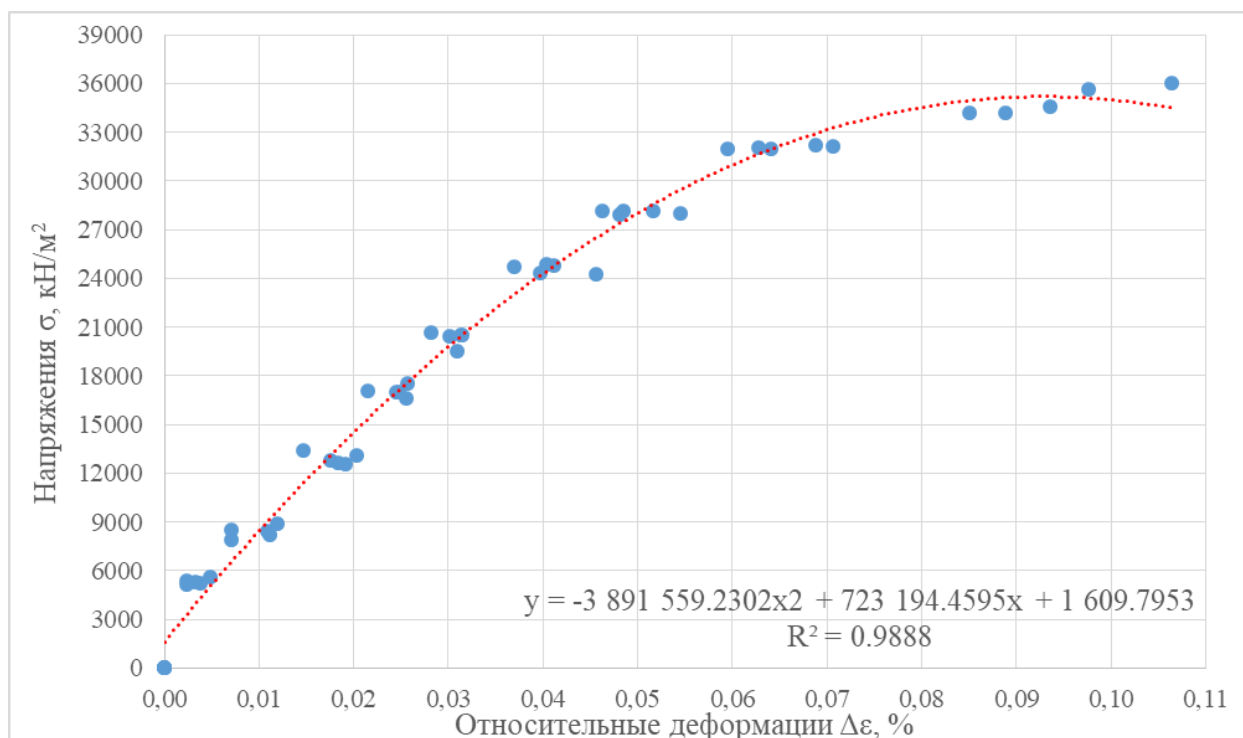


Рис. 3. – Линия регрессии образцов третьей серии

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{D_{\text{факт}}^2}{D_{\text{общ}}^2}}, \quad (7)$$

$$D_{\text{факт}}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_{(x)} - Y_{cp})^2 n_{xi}, \quad (8)$$

$$D_{\text{общ}}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_i - Y_{cp})^2 n_{yi}. \quad (9)$$

Для определения доли общей дисперсии, объясняемой зависимостью результативного признака от факторного, вычисляется коэффициент детерминации $\eta_{y/x}$ по формуле (10):

$$\eta_{y/x} = r_{y/x}^2. \quad (10)$$

Вычислим факторную и общую дисперсии для образцов первой серии, с целью нахождения коэффициентов корреляции и детерминации. Объемные вычисления второстепенных параметров $\sum Y_{(x)}$, $\sum Y_i$ и $\sum Y_{cp}$ производились в Excel и в статье не отражаются.

$$D_{\text{факт}}^2 = \sum (Y_{(x)} - Y_{cp})^2 = \sum Y_{(x)}^2 - \sum 2Y_{(x)}Y_{cp} + \sum Y_{cp}^2;$$

$$D_{\text{факт}}^2 = 23,28 \times 10^9 - 33,71 \times 10^9 + 16,86 \times 10^9 = 64,22 \times 10^8.$$

$$D_{\text{общ}}^2 = \sum (Y_i - Y_{\text{ср}})^2 = \sum Y_i^2 - \sum 2Y_i Y_{\text{ср}} + \sum Y_{\text{ср}}^2;$$

$$D_{\text{факт}}^2 = 23,31 \times 10^9 - 33,71 \times 10^9 + 16,86 \times 10^9 = 64,54 \times 10^8.$$

$$r_{y/x} = \sqrt{\frac{64,22 \times 10^8}{64,54 \times 10^8}} = 0,9975;$$

$$\eta_{y/x} = 0,9975^2 = 0,9950.$$

Аналогичные вычисления производятся для образцов второй и третьей серий. Полученные значения дисперсий, коэффициентов корреляции и детерминации представлены в таблице № 5.

Таблица № 5

Дисперсия, корреляция и детерминация

Серия образцов	Дисперсия		Коэффициент	
	Факторная $D_{\text{факт}}^2$	Общая $D_{\text{общ}}^2$	Корреляции $r_{y/x}$	Детерминации $\eta_{y/x}$
1-ая	6421813011,52	6454327868,85	0,9975	0,9950
2-ая	5858157475,95	6025871958,00	0,9860	0,9722
3-я	6128719021,25	6198159287,78	0,9944	0,9888

Выводы

Экспериментально подтверждено, что при увеличении скорости нагружения отмечается тенденция к росту предельной прочности и снижению величины предельной относительной деформации бетона, что согласуется с известными данными о явлении динамического упрочнения бетона

Построенные регрессионные модели обладают высокой прогностической надёжностью и могут быть использованы для инженерной оценки прочности бетонных конструкций в условиях переменной или динамической нагрузки, включая сейсмические воздействия, взрывные нагрузки и интенсивное транспортное воздействие.

Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших исследований, направленных на уточнение параметров моделей, расширение экспериментальной базы, а также на изучение влияния других факторов, таких как состав бетона, условия твердения, армирование и температурно-влажностный режим. Это позволит более глубоко понять механизмы изменения деформативно-прочностных характеристик бетона при различных режимах высокоскоростного нагружения и, соответственно, повысить надёжность и безопасность железобетонных конструкций в реальных условиях эксплуатации.

Литература

1. Несветаев Г. В. Бетоны: учебно-справочное пособие. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2011. – 381 с.
2. Kosmatka S. H., Kerkhoff B., Panarese W. C. Design and Control of Concrete Mixtures. – 16th ed. – Skokie, IL: Portland Cement Association, 2002. – 360 p.
3. Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных: учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: Физический факультет МГУ, 2002. – 44 с.
4. Montgomery D. C. Design and Analysis of Experiments. – 8th ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2012. – 624 p.
5. Копылова И. Б. Методы обработки экспериментальных данных: сборник учебно-методических материалов для магистров направления подготовки 03.04.01 «Прикладные математика и физика» / сост. И. Б. Копылова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2017. – 48 с.
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.

7. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis. – 3rd ed. – New York: Wiley, 1998. – 706 p.
8. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. Introduction to Linear Regression Analysis. – 5th ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2012. – 672 p.
9. Тюрин Ю. Н., Макаров А. А. Анализ данных на компьютере / под ред. В. Э. Фигурнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 528 с.
10. Деденко Л. Г., Керженцев В. В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 112 с.
11. Cohen J., Cohen P., West S. G., Aiken L. S. Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences. – 3rd ed. – New York: Routledge, 2003. – 688 p.
12. Клейнер В. М. Корреляционный и регрессионный анализ: учебное пособие. – М.: Наука, 1983. – 256 с.

References

1. Nesvetaev G.V. Betony: uchebno-spravochnoe posobie [Concrete: study and reference manual]. Rostov-na-Donu: Feniks, 2011. 381 p.
2. Kosmatka S.H., Kerkhoff B., Panarese W.C. Design and Control of Concrete Mixtures. 16th ed. Skokie, IL: Portland Cement Association, 2002. 360 p.
3. Mitin I.V., Rusakov V.S. Analiz i obrabotka eksperimental'nykh dannykh: uchebno-metodicheskoe posobie dlya studentov mladshikh kursov [Analysis and processing of experimental data: tutorial for junior students]. M.: Fizicheskiiy fakultet MGU, 2002. 44 p.
4. Montgomery D.C. Design and Analysis of Experiments. 8th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2012. 624 p.
5. Kopylova I.B. Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh: sbornik uchebno-metodicheskikh materialov dlya magistrov napravleniya podgotovki 03.04.01 "Prikladnye matematika i fizika" [Methods of processing experimental

data: collection of educational materials for master's students of the program 03.04.01 "Applied mathematics and physics"]. sost. I.B. Kopylova. Blagoveshhensk: Izd-vo AmGU, 2017. 48 p.

6. Gmurman V.E. Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike: uchebnoe posobie dlya studentov vuzov [Guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics: textbook for university students]. 9-e izd., ster. M. : Vysshaja shkola, 2004. 404 p.

7. Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis. 3rd ed. New York: Wiley, 1998. 706 p.

8. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to Linear Regression Analysis. 5th ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2012. 672 p.

9. Tyurin Yu.N., Makarov A.A. Analiz dannykh na kompyutere [Data analysis on a computer]. pod red. V. Je. Figurnova. 3-e izd., pererab. i dop. M.: INFRA-M, 2002. 528 p.

10. Dedenko L.G., Kerzhentsev V.V. Matematicheskaya obrabotka i oformlenie rezul'tatov eksperimenta [Mathematical processing and presentation of experimental results]. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1977. 112 p.

11. Cohen J., Cohen P., West S.G., Aiken L.S. Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences. 3rd ed. New York: Routledge, 2003. 688 p.

12. Kleyner V.M. Korrelyatsionnyy i regressyonnyy analiz: uchebnoe posobie [Correlation and regression analysis: tutorial]. V. M. Klejner. M.: Nauka, 1983. 256 p.

Дата поступления: 2.08.2025

Дата публикации: 25.09.25