

Измерение ядер Вольтерра систем с нелинейностями аналитического и кусочного характера в виде зоны нечувствительности

Е.Ю. Кисловский

Донской государственной технической университет, г. Ростов-на-Дону

Аннотация: Работа касается проблем идентификации систем с нелинейностями смешанного вида. Показан усовершенствованный способ частотной идентификации с применением системы корреляторов, позволяющий регистрировать билинейную частотную характеристику. Предложен подход, обеспечивающий более точное измерение частотных характеристик ядер Вольтерра, заключающийся в коррекции откликов. Демонстрируется работоспособность предложенного подхода на примере нелинейной системы, включающей блок нечувствительности. На основе известных аналитических значений рассчитываются погрешности методов.

Ключевые слова: ряд Вольтерра, системная идентификация, нелинейные системы, кусочные нелинейности, частотные характеристики, уравнение Риккати.

Введение

Для нелинейных динамических систем с сосредоточенными параметрами, допускающих описание в детерминированном виде, задача системной идентификации решается либо с применением блочных моделей Гаммерштейна-Винера [1], либо с полиномом Вольтерра [2]. Выбор модели обусловлен характером нелинейности объекта идентификации. Наличие кусочных нелинейностей дает основание использовать более простые блочные модели в виде каскада, изображенного на рис.1.

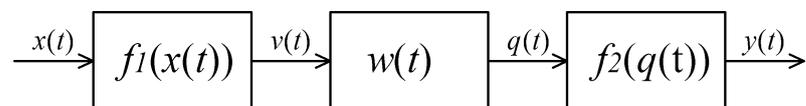


Рис. 1. - Блочная нелинейная модель Гаммерштейна-Винера

Динамика такой модели отражается системой уравнений:

$$\begin{cases} v(t) = f_1(x(t)) \\ q(t) = \int_0^t w(t-\tau) f_1(x(\tau)) d\tau, \\ r(t) = f_2(q(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где x - вход системы, r - выход системы, w - импульсная характеристика или ядро, f_1 и f_2 - статические нелинейные характеристики на входе и выходе системы.

Если нелинейность имеет аналитический характер, целесообразно описать динамику объекта с помощью ряда Вольтерра:

$$r(t) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t w_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_m) \prod_{m=1}^n x(\tau_m) d\tau_m, \quad (2)$$

где индексом при w указывается порядок ядра.

Представление ядер в параметрическом виде выявит связь параметров с нелинейностями, что является преимуществом относительно (1), где блоки нелинейностей чаще всего абстрактные функции.

Для реальных объектов задача усложняется наличием нелинейных элементов различного характера. Уместным примером могут служить электродвигатели. В работе [3] на примере вентильного двигателя, показано разложение нелинейной функции потокосцепления в ряд Вольтерра. Появление дефектов сопровождается возникновением нелинейностей смешанного характера [4]. Также данные устройства имеют нелинейность кусочного характера, которая обусловлена сухим трением. В упрощенном виде такая нелинейность описывается с использованием блока нечувствительности [5]. Примеры более детализированных моделей содержат функцию sgn [6]. Наличие в устройстве разных видов нелинейностей может увеличить погрешность идентификации. В описанном примере кусочные нелинейности не позволяют рассматривать ядра Вольтерра как регулярные функции, что отражается в погрешности их измерения [6]. При этом, в ряде случаев нелинейности кусочного характера более предсказуемы, что позволяет их скомпенсировать в отклике. Целью данной работы является отработка подхода, обеспечивающего более точное измерение ядер Вольтерра за счет такой коррекции отклика.

Частотная идентификация ядер Вольтерра

Будем рассматривать поиск ядер в частотной области с применением метода испытательных сигналов [7]. В рамках этого метода измерение частотных характеристик (ЧХ) выполняется на основе реакций на гармонические и полигармонические сигналы:

$$x(t) = K \sin(\omega t),$$

$$x(t) = \sum_{m=1}^n K \sin(\omega_m t), \quad \text{при } \omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n,$$

где K – некоторый коэффициент.

Испытания выполняются последовательно с различными коэффициентами K , отличными от 0 и 1. Число испытаний зависит от количества измеряемых ядер. По результатам таких экспериментов, в каждый момент времени справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} r_1(t) = r_0 + K_1 y_1(t) + K_1^2 y_2(t) + \dots + K_1^n y_n(t) \\ r_2(t) = r_0 + K_2 y_1(t) + K_2^2 y_2(t) + \dots + K_2^n y_n(t) \\ \dots \\ r_n(t) = r_0 + K_n y_1(t) + K_n^2 y_2(t) + \dots + K_n^n y_n(t) \end{cases}, \quad (3)$$

где $y_{1,2,\dots,n}$ – выходы ядер различных порядков. Принимая систему стационарной и физически реализуемой, r_0 будет равно 0.

Разделение отдельных откликов осуществляется путем решения (3). Регистрация значений ЧХ ядер выше первого порядка выполняется с помощью Фурье преобразования отклика y_n и выделения комбинационной гармоники с частотой $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$. Более подробно механизм появления таких гармоник показан в [8]. Важной особенностью в испытаниях с полигармоническими сигналами, является использование гармоник с несоизмеримыми частотами, что необходимо для исключения наложения комбинационных гармоник в спектрограммах откликов. С целью сократить количество экспериментов, аналитические нелинейности объекта

идентификации будут иметь слабый характер. В таком случае модель (2) ограничим суммой линейного и билинейного ядер.

В дальнейших вычислительных экспериментах описанный метод будет модифицирован с помощью системы корреляторов. При достаточном объеме экспериментальных данных такой подход обеспечит меньшую погрешность. Структурная схема измерительной системы представлена на рис.2.

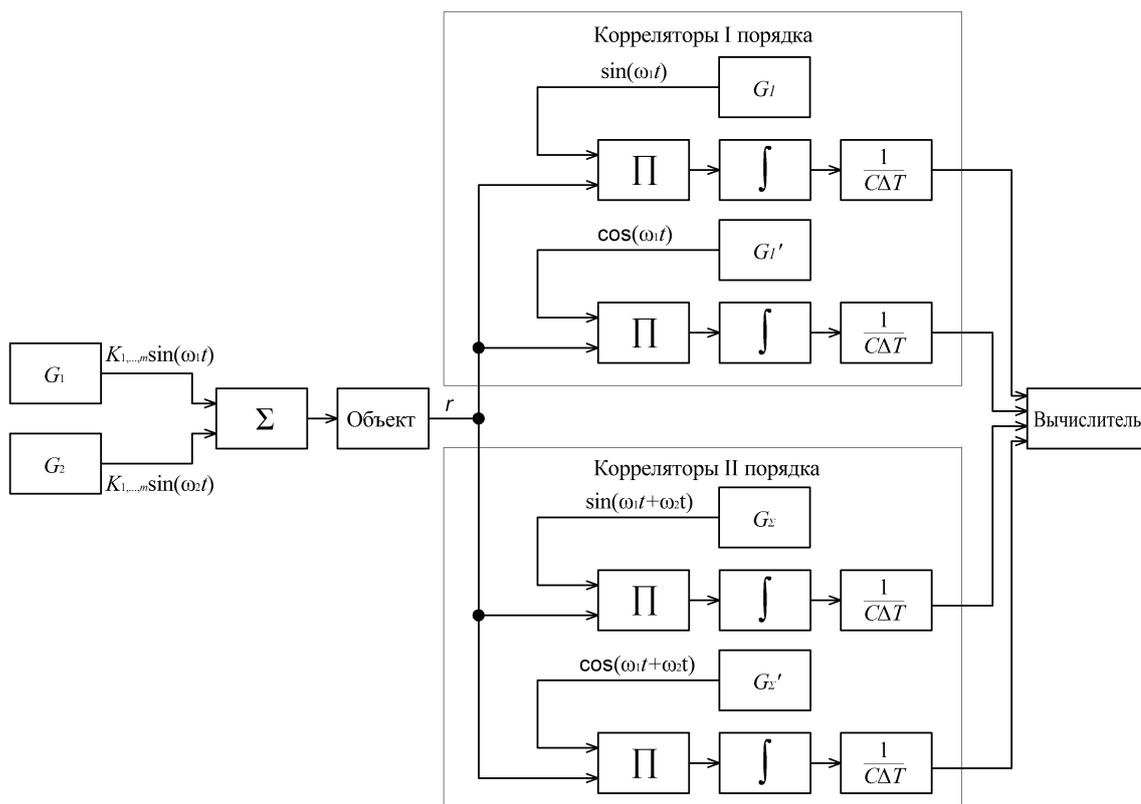


Рис. 2. – Структурная схема измерителя

Как и в известном способе измерения ЧХ [9], предлагаемый способ требует умножений отклика на ортогональные сигналы, интегрирования, усреднения и преобразования в полярную систему координат. Разница заключается в количестве корреляторов, настройке генераторов опорных сигналов и дополнительной операции деления в вычислителе. Выходы корреляторов первого порядка представлены функциями:

$$\frac{\gamma_{1...m}^I}{2} = \frac{K_{1...m}}{C\Delta T} \int_0^{C\Delta T} |H_1(j\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \varphi(j\omega_1)) \sin(\omega_1 t) dt + \dots \approx \frac{K_{1...m}}{2} |H_1(j\omega_1)| \cos \varphi(j\omega_1),$$

$$\frac{\lambda_{1,\dots,m}^I}{2} = \frac{K_{1,\dots,m}}{C\Delta T} \int_0^{C\Delta T} |H_1(j\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \varphi(j\omega_1)) \cos(\omega_1 t) dt + \dots \approx \frac{K_{1,\dots,m}}{2} |H_1(j\omega_1)| \sin \varphi(j\omega_1),$$

где $C\Delta T$ - время интегрирования C - циклов с периодом ΔT , H – частотная характеристика, φ – аргумент ЧХ. Верхние индексы в виде римских цифр указывают на порядок корреляторов, которые использовались для получения γ и λ .

Генераторы опорных сигналов в корреляторах второго порядка настраиваются на частоту, равную сумме частот тестовых гармоник. Таким образом, выходы корреляторов второго порядка примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{1,\dots,m}^{II}}{2} &= -\frac{K_{1,\dots,m}^2}{C\Delta T} \int_0^{C\Delta T} |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_2(j\omega_1, j\omega_2)) \sin((\omega_1 + \omega_2)t) dt + \dots \approx \\ &\approx -\frac{K_{1,\dots,m}^2}{2} |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \sin \varphi_2(j\omega_1, j\omega_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{1,\dots,m}^{II}}{2} &= -\frac{K_{1,\dots,m}^2}{C\Delta T} \int_0^{C\Delta T} |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_2(j\omega_1, j\omega_2)) \cos((\omega_1 + \omega_2)t) dt + \dots \approx \\ &\approx -\frac{K_{1,\dots,m}^2}{2} |H_2(j\omega_1, j\omega_2)| \cos \varphi_2(j\omega_1, j\omega_2). \end{aligned}$$

Вычислитель в схеме необходим для того, чтобы разделить отклики ядер и преобразовать результаты измерения в полярную систему координат. Процедура разделения выполняется путем решения уравнения, содержащего изображения выходов Y :

$$\begin{cases} r_1^{I,II} = K_1 Y_1^{I,II} + K_1^2 Y_2^{I,II} \\ r_2^{I,II} = K_2 Y_1^{I,II} + K_2^2 Y_2^{I,II} \end{cases},$$

где

$$r_{1,\dots,m}^{I,II,\dots,m} = \gamma_{1,\dots,m}^{I,II,\dots,m} + j\lambda_{1,\dots,m}^{I,II,\dots,m}$$

Расчет амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик выполняется с использованием известных соотношений:

$$|H(j\omega_1, \dots, j\omega_m)| = \sqrt{\operatorname{Re}(Y_{1,\dots,m})^2 + \operatorname{Im}(Y_{1,\dots,m})^2},$$

$$\varphi(j\omega_1, \dots, j\omega_m) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(Y_{1, \dots, m})}{\operatorname{Re}(Y_{1, \dots, m})}.$$

Коррекция откликов

Как уже было отмечено, идентификация согласно описанному методу, обеспечит приемлемую погрешность в том случае, если ядро является однозначной функцией во всей области определения. Предлагаемый подход заключается в придании откликам вида неискаженного кусочными нелинейностями. Фокусируясь на системе имеющей зону нечувствительности, можно руководствоваться балансными представлениями для коррекции реакций системы $r(t)$. Применительно к пассивной системе это условие может быть выражено тождеством:

$$\int x^2(t) dt \equiv \sum_{i=1}^g \int y_i^2(t) dt, \quad (4)$$

где g есть общее число гармоник, обусловленных как линейными, так и нелинейными свойствами системы.

Рассматривая упомянутый пример с электродвигателем [6], в правой части тождества (4) должны быть исключены гармоники от разложения функции сухого трения, а также скорректированы гармоники выхода линейного ядра и комбинационные гармоники ядер более высоких порядков. Кроме того, при коррекции должно быть учтено диссипативное рассеяние энергии в обмотке ротора и усилителе в моменты времени предшествующие страгиванию ротора. На практике такая детальная коррекция весьма трудоемка и требует специальных средств регистрации компонент спектра. Для упрощения процедуры коррекции, можно увеличивать реакцию до предполагаемого неискаженного уровня специальным коэффициентом:

$$r_k = kr^*, \quad (5)$$

$$k = \frac{\max(r)}{\max(r^*)}, \quad (6)$$

где r^* есть отклик модели с блоком кусочной нелинейности.

Такой подход более груб, но ощутимо проще. Недостатком является неустранимые искажения в области срабатывания зоны нечувствительности.

Отработку метода выполним с применением модели, заданной нелинейным дифференциальным уравнением Рикатти:

$$T \frac{dy}{dt} = x(t) - My(t) - Ny(t)^2, \quad (7)$$

где T , M и N - параметры системы. Из работы [10] известны ЧХ линейного и билинейного ядер такой системы:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + M}, \quad (8)$$

$$H_2(j\omega_1, j\omega_2) = -\frac{NH_1(j\omega_1)H_1(j\omega_2)}{(Tj\omega_1 + Tj\omega_2 + M)}. \quad (9)$$

Усложним (7) блоком нечувствительности, согласно модели Гаммерштейна. Модель в виде структурной схемы показана на рис.3.

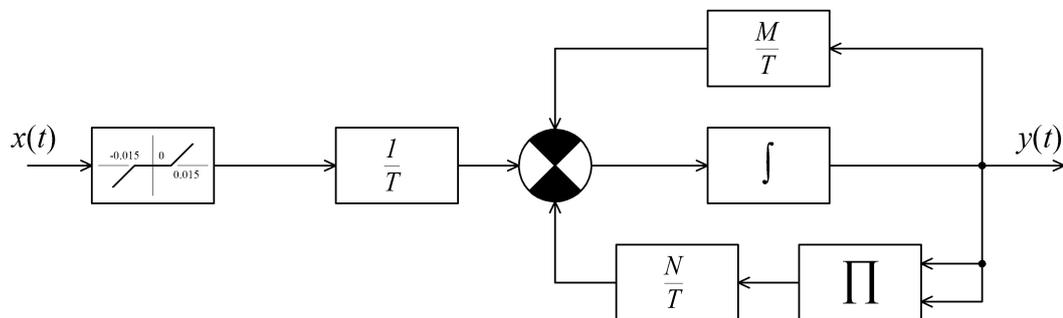


Рис. 3. - Модель со смешанными нелинейностями

Задача заключается в измерении (8) и (9) с наименьшей погрешностью, для модели, изображенной на рис.3.

Для иллюстрации коррекции откликов проведем несколько вычислительных экспериментов. Параметры системы имеют следующие значения: $T=1$, $M=1$, $N=0.55$, границы в блоке нечувствительности заданы значениями -0.015 и 0.015 . Эксперименты проводились с подачей гармонического сигнала с частотой 2.7 рад/с. Чтобы воспользоваться

корреляционной обработкой проводилось 2 эксперимента, в первом, вход масштабировался коэффициентом $K_1=0.1$, а во втором $K_2=0.5$. Пара экспериментов выполнялась с моделью, имеющей блок нечувствительности и еще пара без него. Вид откликов на такие воздействия для системы с блоком нечувствительности и без него представлены на рис.3 и рис.4.

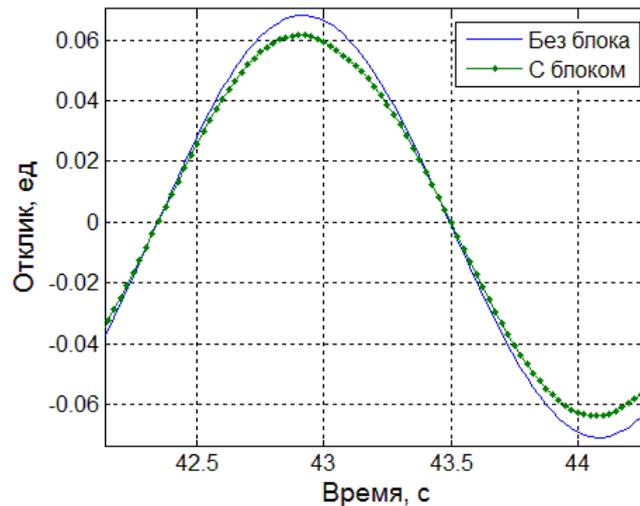


Рис. 3. – Фрагмент откликов моделей на гармонику с амплитудой K_1

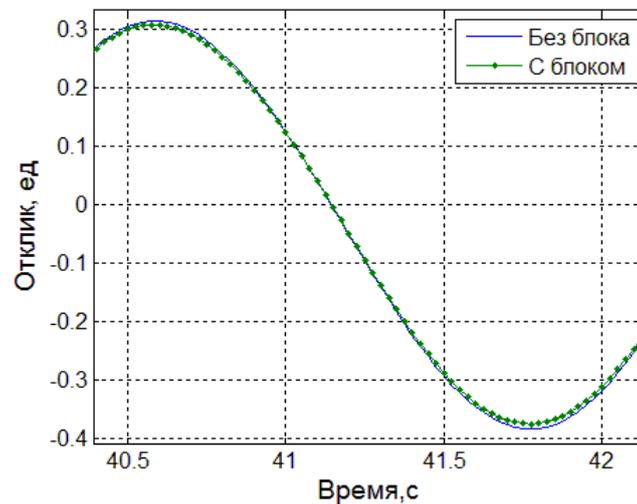


Рис. 4. – Фрагмент откликов моделей на гармонику с амплитудой K_2

В результате анализа выходов, для коррекции откликов подобраны коэффициенты: $k_1=1.1$, $k_2=1.02$. В дальнейшей отработке процедура подбора коэффициентов аналогична.

Результаты

Для оценки работоспособности описанного подхода проведена серия вычислительных экспериментов с тестовыми сигналами, образованными частотами: 2.7, 7.9 и 11.4 рад/с. Имитационное моделирование и корреляционный алгоритм были реализованы с помощью пакета Matlab. В таблицах 1 и 2 показаны результаты идентификации на основе данных имитационного моделирования с применением различных методов.

Таблица 1

Линейные частотные характеристики

Частота, рад/с	Без коррекции		С коррекцией		Аналитические значения	
	$ H_1 $, ед	φ_1 , рад	$ H_1 $, ед	φ_1 , рад	$ H_1 $, ед	φ_1 , рад
2.7	0.3072	-1.2067	0.3464	-1.2070	0.3473	-1.2161
7.9	0.1112	-1.4436	0.1270	-1.4436	0.1256	-1.4449
11.4	0.0774	-1.4817	0.0894	-1.4817	0.0874	-1.4833

Таблица 2

Билинейные частотные характеристики

Частота		Без коррекции		С коррекцией		Аналитические значения	
ω_1 , рад/с	ω_2 , рад/с	$ H_2 $, ед	φ_2 , рад	$ H_2 $, ед	φ_2 , рад	$ H_2 $, ед	φ_2 , рад
2.7	2.7	0.0116	-0.6799	0.0118	-0.6889	0.0121	-0.6783
7.9	2.7	0.0021	-1.1147	0.0022	-1.0215	0.0023	-0.9961
11.4	2.7	0.0014	-1.092	0.0013	-1.0872	0.0012	-1.0578
7.9	7.9	0.000564	-1.3032	0.000547	-1.2586	0.00055	-1.2558
11.4	7.9	0.00037	-1.4762	0.000339	-1.4003	0.00031	-1.3056
11.4	11.4	0.000198	-1.3291	0.000168	-1.3465	0.00018	-1.352

Для сравнения экспериментальных моделей с аналитической рассчитаем погрешности АЧХ и ФЧХ:

$$E = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \left(\frac{X_i - Z_i}{X_i} \right)^2},$$

где X – значения аналитической, а Z – значения экспериментальных ЧХ.

Результаты расчета погрешностей представлены в таблице 3.

Таблица 3

Погрешности частотных характеристик

	Без коррекции	С коррекцией
$E_{ H_1 }$	0.0812	0.0104
E_{φ_1}	0.0045	0.0044
$E_{ H_2 }$	0.1191	0.0615
E_{φ_2}	0.0753	0.0615

Данные, полученные с коррекцией откликов, достаточно близки к аналитическим и обеспечивают меньшую ошибку относительно результатов обработки нескорректированных откликов. Значительное уменьшение погрешности наблюдается в модуле линейной и билинейной ЧХ.

Заключение

В результате проведенного исследования, показана эффективность предложенного способа частотной идентификации ядер Вольтерра для систем, имеющих кроме нелинейностей гладкого характера, зону нечувствительности. Для повышения точности использована коррекция откликов, уменьшающая влияние кусочной нелинейности. Подход отработан с применением имитационной модели со смешанными нелинейностями. Относительно нескорректированных данных погрешности в определении модуля линейного и билинейного ядер оказались меньше примерно на 7% и 6% соответственно. Развитие подхода, связано с разработкой методов компенсации прочих типовых нелинейностей.

Литература

1. Dreesen P., Ishteva M. Parameter estimation of parallel Wiener-Hammerstein systems by decoupling their Volterra representations // IFAC-PapersOnLine, 2021. pp. 457-462.
 2. Таран В.Н., Кисловский Е.Ю. Функциональный метод параметризации модели Вольтерра-Винера // Инженерный вестник Дона, 2021, №6 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2021/7049.
 3. Григоренко С.Н., Павленко С.В., Павленко В.Д., Фомин А.А. Информационная технология диагностирования состояний электродвигателей на основе моделей Вольтерра // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2014. №4/11. С. 38-43.
 4. Чернов А.В., Пугачёва О.Ю., Абидова Е.А. Математическое моделирование диагностического сигнала при оценке состояния электроприводной арматуры по сигналу тока двигателя // Инженерный вестник Дона, 2011, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/502.
 5. Ярцев А.В. Об управлении угловым отклонением рамок электромеханической системы посредством ПД-регулятора // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. №4. С. 139-149.
 6. Кисловский Е.Ю., Таран В.Н. Способ контроля электромеханических систем на основе измерения мультилинейных частотных характеристик // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2025. №1. С. 46-52.
 7. Boyd S.P., Chang Y.S., Chua L.O. Measuring Volterra kernels // IEEE transactions on circuits and systems, vol. CAS-30. №8. 1983. pp. 571-577.
 8. Rugh, W.J. Nonlinear system theory: The Volterra/Wiener approach. The Johns Hopkins university press, 1981. 344 p.
 9. US Patent 4,322,806. Int.Cl.³ G01R 23/00. Frequency response analyzer / Allison H. - Publ. 30.03.1982.
-

10. Таран А.Н., Таран В.Н. Использование сплайновых рядов Вольтерра-Винера при анализе нелинейных электрических цепей // Радиотехника и электроника. 2014. №7. С. 702-710.

References

1. Dreesen P., Ishteva M. IFAC-PapersOnLine, 2021. pp. 457-462.
2. Taran V.N., Kislovskiy E.Yu. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, №6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2021/7049.
3. Grigorenko S.N., Pavlenko S.V., Pavlenko V.D., Fomin A.A. Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. 2014. №. 4/11. pp. 38-43.
4. Chernov A.V., Pugachyeva O.Yu., Abidova E.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2011, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/502.
5. Yartsev A.V. Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki. 2015. №4. pp. 139-149.
6. Kislovskiy E.Yu., Taran V.N. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki. 2025. №1. pp. 46-52.
7. Boyd S.P., Chang Y.S., Chua L.O. IEEE transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-30. №8. 1983. pp. 571-577.
8. Rugh, W.J. Nonlinear system theory: The Volterra/Wiener approach. The Johns Hopkins university press, 1981. 344 p.
9. US Patent 4,322,806. Int.Cl.³ G01R 23/00. Frequency response analyzer. Allison H. Publ. 30.03.1982.
10. Taran A.N., Taran V.N. Radiotekhnika i jelektronika. 2014. №7. pp. 702-710.

Дата поступления: 14.01.2026

Дата публикации: 3.03.2026