Марковские модели и экспоненциальное распределение в проектном управлении

А.Н. Пунтиков, А.Н. Шиков

Северо-Западный институт управления РАНХиГС, Санкт-Петербург

Аннотация: В работе исследуется природа экспоненциального поведения и выявляются условия, при которых вероятностное распределение срока завершения проекта отклоняется от экспоненциального. Для этого разработана модель, в которой эволюция проекта описывается как марковский процесс с матрицей переходов, содержащей константу во всех элементах первой строки. Такая структура соответствует ситуации, при которой проект может быть перезапущен в любой момент. Времена завершения проектов могут подчиняться различным статистическим распределениям, включая нормальное, экспоненциальное и более сложные формы. Примерами таких проектов могут быть исследовательские, разведывательные, венчурные и другие подобные проекты. Анализ динамики показывает, что модель надежно воспроизводит экспоненциальное распределение в случаях, когда вероятность перезапуска остается умеренной. Это указывает на предел применимости экспоненциального описания: оно адекватно при низкой и средней вероятности перезапуска, но теряет точность при высоком уровне неопределенности.

Ключевые слова: марковские процессы, управление проектами, экспоненциальное распределение, время завершения проекта, оценка рисков, вероятностное прогнозирование, неопределенность в проектах, риски допущений, динамика эволюции проекта.

Существующие математические модели, описывающие динамику проектов, обладают тем недостатком, что их нельзя использовать для принятия решений в рамках изолированного уникального проекта, а именно такие проекты представляют наибольший интерес с точки зрения проектного управления. Типовыми (не уникальными) проектами можно управлять, руководствуясь существующими регламентами и наработанной на схожих проектах интуицией. Проекты, реализуемые в мультипроектном окружении (не изолированные), управляются на уровне потока, когда ресурсы и риски распределяются между параллельными проектами, а в таком случае более эффективным оказывается операционное управление, а не проектное [1]. Таким образом именно изолированные уникальные проекты, с одной стороны, нуждаются в моделях, которые бы позволяли делать реалистичные прогнозы, не опирающиеся на исторические данные, а с другой, не могут использовать модели, известные из операционного управления.

Изолированные уникальные проекты требуют математического описания с помощью байесовской статистики, которое не опирается на такие понятия, как среднее время выполнения проекта, средняя вероятность закончить проект вовремя или наиболее вероятное время его окончания, поскольку такие проекты не по чему усреднять, ведь для них не существует ни аналогичных, ни параллельных проектов. Таким образом, особый интерес в проектном управлении представляют такие модели, которые оперируют не усредненными величинами, а вероятностными распределениями сроков завершения и ресурсов проекта, профиль которых зависит от условий, которые в общем случае также описываются уже собственными распределениями вероятности.

Сложнее всего поддаются оценке сроки завершения для проектов с высокой степенью неопределенности и множеством неизвестных факторов, которые могут оказать на проект существенное влияние. Именно такие проекты чаще всего оказываются провальными. Природа неопределенности, ключевой для таких проектов, — это недостаток информации у самой команды, а не непредсказуемые рисковые события. Множество независимых рисковых событий, каждое из которых в отдельности, не является определяющим для успеха проекта, а лишь приводит к потенциальным задержкам или расходам, складываются в нормальное распределение независимо от того, какова структура их вероятностного распределения. А вот для потенциально неверного направления развития проекта нельзя применить центральную предельную теорему. В терминологии PRINCE2 [2] утверждения, которые «для целей планирования принимаются за истинные, но могут быть изменены позже, называются допущениями. Рассмотрим такой проект, для которого определяющим типом рисков являются потенциально неверные допущения. Для краткости в последующем будем называть такие проекты «проектами, зависящими от допущений». Допущения делаются там, где какие-либо факты еще не известны или не определены, и обычно касаются обстоятельств такой значимости» [1]. То есть по определению, если положенные в основу проекта допущения окажутся неверными, то может как произойти откат назад или скачок вперед на несколько тактов, так и измениться количество необходимых для завершения проекта тактов и их последовательность.

Модель, которая бы учитывала все возможные преобразования состояния проекта по мере уточнения допущений потребовала бы очень большого количества параметров. «Классический метод проектного менеджмента является основой при управлении любым проектом. Данный подход, как правило, ориентирован на проекты, в которых есть строгие ограничения по последовательности выполнения задач» [3]. Если допущения требуется смоделировать одним единственным параметром, то достаточно зафиксировать какую-либо вероятность того, что на одном из этапов выяснится, что допущения неверны и проект нужно начинать с начала. Тогда возникает ненулевая вероятность перехода между любыми двумя состояниями, пусть и не обязательно за один такт. Такая модель отражает тот факт, что по мере реализации проекта остается все меньше возможностей для маневра, поскольку заканчиваются выделенные на проект временные и материальные ресурсы, а из-за этого уточнение допущений на поздних этапах проекта имеет более весомые последствия. Кроме того, эта модель хорошо отражает сущность допущений в отличие от рисковых событий (в терминологии PRINCE2). Например, если по дороге в магазин, произошла пробка (рисковое событие), то проект приостанавливается или возвращается на пару тактов назад. Но если магазин закрыт (обнаруживается неверное допущение), то проект возвращается в начало, не зависимо от того на каком этапе пути это выяснилось. «Проектные инициативы выступают в качестве динамичных и интегративных систем, абсорбирующих множество компонентов и подсистем, что стимулирует их непрерывное взаимодействие с окружающей средой. В процессе их деятельности осуществляется мобилизация необходимых ресурсов из внешней среды и предоставление результатов в неё, при этом проекты подвергаются влиянию разнообразных рисков» [4].

Для описания динамики проекта, зависящего от допущений, будем считать, что он представляет из себя марковский процесс, эволюция которого описывается стационарной матрицей переходов. Каждый элемент такой матрицы соответствует вероятности перехода системы из состояния, соответствующего номеру столбца, в состояние соответствующее номеру строки. Каждый столбец такой матрицы — это состояние, в которое перейдет на следующем такте соответствующее чистое состояние. Мы не будем учитывать в векторе состояния проекта, компоненту, соответствующую состоянию «проект завершен», считая, что вероятность того, что проект уже завершен это дополнение до единицы вероятности того, что проект находится на каком-то из других шагов проекта. Обозначим за N длительность проекта в тактах. С одной стороны, это идеальное время выполнения проекта, то есть такое, которое понадобилось бы в отсутствии любых рисков, а с другой — это общее количество состояний проекта.

Поскольку вероятность возвратиться из любого состояния в начальное отражается первой компонентой в каждом из столбцов матрицы переходов, то для учета возможных неверных допущений ее верхняя строка должна быть заполнена значениями a (от "assumption"), а элементы под главной диагональю должны стать на a меньше. Здесь может показаться целесообразным заменить в элементах под главной диагональю значения $(1-a)$ на единицы, т.к. a — это вероятность того, что в течение одного такта в проекте, который состоит из большого их количества обнаружится, что проект нужно начинать с начала, а это должна быть достаточно низкая вероятность для любого проекта, который в принципе может рассчитывать на успешное выполнение. Но такая упрощение недопустимо, поскольку матрица переходов имеет размеры $N \times N$, и если пренебречь в каждом элементе малой величиной a, то в итоге будет утерян фактор порядка aN, а он может быть сравним с единицей. Если проект представляет интерес с точки зрения анализа рисков, то вероятность просто выполнить его с первой попытки за ровно N тактов будет малой. Таким образом, матрица переходов для проекта, зависящего от допущений, имеет вид (1):

$$m_a = \begin{pmatrix} a & a & a & a & \dots & a & a & a & a \\ 1-a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Матрица m_a^k описывает положение проекта спустя k тактов, если ее умножить на вектор-столбец состояния системы получится вектор состояния системы через k тактов. Тогда i-й элемент первого столбца этой матрицы — это вероятность обнаружить систему в i-м состоянии через k тактов с момента запуска проекта. Тогда сумма всех элементов первого столбца — это вероятность того, что проект все еще не завершен через k тактов. Когда описана динамика состояния системы, среднее количество тактов, необходимых для окончания проекта, становится вычисляемой характеристикой системы, а не ее параметром, а именно, это сумма таких вероятностей (2).

$$\overline{n}_a = \sum_{столбец1} \sum_{i=0}^{\infty} m_a^i \tag{2}$$

Справа в формуле (2) стоит сумма геометрической прогрессии, для которой можно записать выражение (3).

$$\sum_{i=0}^{\infty} m_a^i = (I - m_a)^{-1} \tag{3}$$

где I — единичная матрица.

Обратная матрица для $(I - m_a)$ вычисляется с помощью математического программного обеспечения и имеет вид (4).

$$(I - m_a)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-a)^N} & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(1-a)^{N-1}} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(1-a)^2} & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{1-a} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Сумма элементов первого столбца вычисляется по формуле (5).

$$\overline{n}_a = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(1-a)^i} = \frac{1}{1-a} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1-a}\right)^N\right)}{1 - \frac{1}{1-a}} = \frac{\left(\frac{1}{1-a}\right)^N - 1}{a} \tag{5}$$

Существенный недостаток полученного выражения в том, что среднее количество тактов, которое необходимо, чтобы выполнить N-тактную задачу, получается не пропорциональным N. Матрица m_a сконструирована таким образом, что если мы решим повысить детализацию при рассмотрении проекта и сделаем такт вдвое короче, то вдвое увеличится количество возможностей обнаружить неверное допущение и резко возрастет относительная задержка по срокам проекта, но количество допущений от того, что такты стали меньше, не увеличилось. Каждый раз пересматривая размер такта, нужно пересматривать и назначаемую тактам величину a, но разрабатываемая модель предназначена для того, чтобы делать прогноз относительно динамики проектов, поэтому должна содержать минимальное количество такого рода подгоночных процедур.

Вероятность A того, что какое-либо из допущений проекта окажется неверным является характеристикой всего проекта в целом. Эта характеристика не должна зависеть от выбранного способа разбиения проекта на такты. В модели допускается равновероятное обнаружение ошибки в допущениях на каждом такте, значит, вероятность того, что за N тактов никакие ошибки в допущениях не проявятся и составляет $(1-a)^N$, поскольку на каждом из N тактов обязательно должно этого не произойти, то можем выразить A через a (6).

$$A = 1-(1-a)^N \Rightarrow a = 1-\sqrt[N]{1-A} \tag{6}$$

Подставляя формулу (6) в модель (5), получаем окончательное выражение для среднего количества тактов, которое не зависит от способа разбиения проекта на такты (7).

$$\overline{n}_a = \frac{A}{(1-A)(1-\sqrt[N]{1-A})} \tag{7}$$

Выражение (7) легко обобщить для непрерывного случая. Для каждого проекта можно говорить об идеальном времени выполнения, то есть таком, которое бы понадобилось для его реализации, если никакие риски не произойдут и никакие допущения не окажутся неверными. Обозначим его буквой τ. В таком случае, разбиение проекта на N тактов означает выбор такта длительностью $\frac{\tau}{N}$, а средняя продолжительность проекта с учетом возможности неверных допущений составит T_a (8).

$$T_a = \frac{\tau}{N}\overline{n}_a \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8) и устремляя N к бесконечности (непрерывный предел), получаем T_a (9).

$$T_a = \frac{A}{(A-1)\ln(1-A)}\tau \tag{9}$$

Формула (9) представляет из себя точную формулу для расчета среднего времени выполнения проекта, зависящего от допущений. Примером такого проекта может быть любая исследовательская деятельность. Например, если управляющий проектом по геологоразведке, знает, что в идеальном случае, когда команда сразу же напала на перспективную локацию, проект займет 1 месяц. При этом, он знает, что вероятность такого удачного попадания составляет 10%, а после выяснения, что выбрана неудачная локация, предстоит начинать все с начала в другой локации. Несложно посчитать, что в среднем разведка займет около 4 месяцев. Если вероятность выбрать удачное направление составляет 20%, то разведывать в среднем предстоит 2,5 месяца и т.д.

Формулу (9) можно использовать для быстрого расчета среднего времени, необходимого для совершения научного открытия, создания успешного стартапа, завершения любых археологических, геолого-разведывательных, поисково-спасательных работ. В практике проектного управления для примерного определения средних сроков действуют исходя из допущения, что если направление было выбрано провальным, то все равно необходимо завершить проект по этому направлению перед тем, как начинать новое направление. В этом случае средний срок оказывается обратно пропорционален *(1-A)* и по сравнению с уточненным выражением (9) теряется множитель $-\frac{\ln(1-A)}{A}$, а этот фактор логарифмически (медленно, но неограниченно) растет с приближением A к единице (рисунок 1).

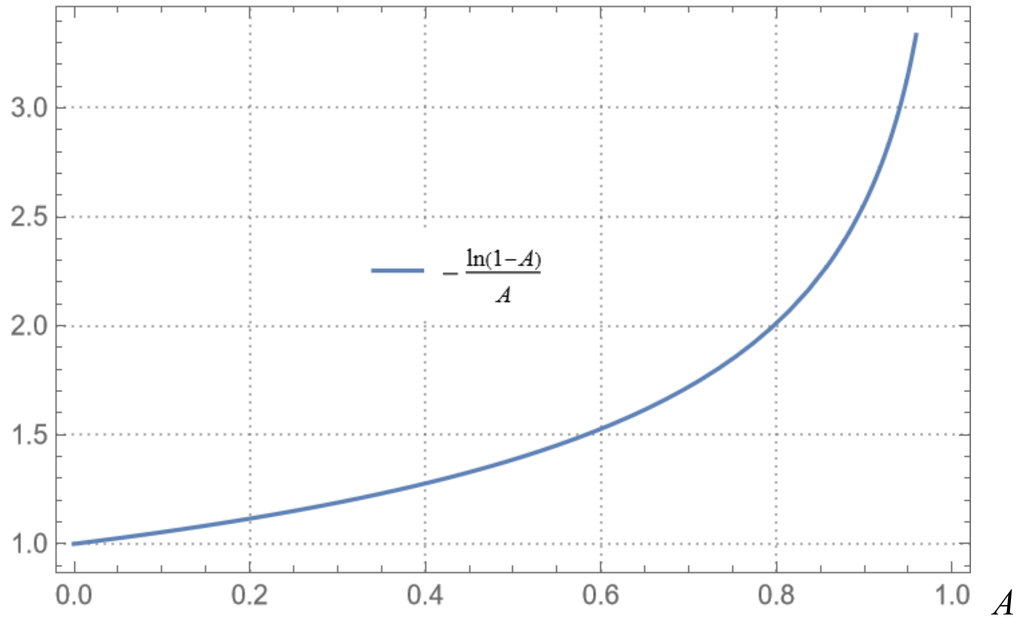

Рис. 1 – График степени отклонения среднего срока завершения проекта по формуле (9) от эмпирической оценки

Расчетный средний необходимый для выполнения проекта срок в случае, если не учитывать возможность проверить ключевые допущения проекта на ранних его этапах, будет завышен в полтора раза при вероятности изначально неверных допущений в 60%, в два раза — при 80% и т.д. Это значит, что для венчурных проектов формула (9) вносит существенное уточнение по сравнению с интуитивным подходом.

Вероятностное распределение срока окончания проекта

Вероятность завершить проект за k тактов при произвольной, но постоянной матрице переходов составляет:

$$P(k) = \vec{p}(I - m^k)\vec{\psi}_0 \tag{10}$$

где $\vec{p}$ — вектор-строка из единиц.

Несмотря на то, что аналитического представления для m^k в случае проекта, зависящего от допущений, по-видимому, не существует, подставляя

(1) в (10), можно получить наглядное представление для некоторых значений *k*. Очевидно, что при $k < N$ вероятность окончания такого проекта равна нулю. На отрезке $N \le k \le 2N$ в первом столбце матрицы переходов (m^k) удачно объединяются вклады от всех членов, отражающих вероятность многократного возврата проекта в начало, и можно получить точное выражение для *P(k)*. Начиная с $k > 2N$ зависящий от *k* вклад в вероятность закончить проект аккуратно за *k* тактов оказывается пропорционален a^2 (точнее A^2, но учет нормировки на данном этапе только загромождает запись, не добавляя значимой информации), а постоянный вклад можно рассчитать аналитически. После *3N* вклад с *k* оказывается пропорционален a^3 и так далее. Итоговое выражение будет иметь вид (11).

$$P(k) = \begin{cases} 0 & k < N \\ (1-a)^N(1+(k-N)a) & N \le k \le 2N \\ (1-a)^N\left(1+Na+\dfrac{(k-2N)(4N-k+1)}{2}a^2+O(a^3)\right) & 2N < k < 3N \\ (1-a)^N\left(1+Na+\dfrac{N(N+1)}{2}a^2+\dfrac{(k-3N)(k^2-3k(1+3N)+3N(5+7N)+2)}{6}a^3+O(a^4)\right) & 3N \le k < 4N \\ (1-a)^N\left(1+Na+\dfrac{N(N+1)}{2}a^2+\dfrac{N(N+1)(N+2)}{6}a^3+O(a^5)\right) & 4N \le k \end{cases} \quad (11)$$

Данное выражение представляет из себя просто сумму по всем траекториям окончания проекта за *k* тактов, а это всегда случайное блуждание от первого такта до *(k-N)* тактов, которое завершается возвратом в начало, а затем прямой путь в верном направлении в течение последних *N* тактов. Единственное ограничение для выбора траекторий – это чтобы проект случайно не оказался выполненным за первые *(k-N)* тактов. Поэтому для промежутка $N \le k \le 2N$ не возникает членов порядка a^2 т.к. на этом промежутке случайное окончание проекта до выхода на финальную часть траектории невозможно по условию.

Делать выводы непосредственно из представления (11) достаточно сложно. Интерес представляет размер того вклада, который характеризует рассматриваемую специфическую модель для проектов, зависящих от допущений, в отличие от стандартных моделей, когда функция распределения вероятности закончить проект принимается просто экспоненциально стремящейся к единице. Экспоненциальное приближение для *P(k)* будет определяться по формуле (12).

$$P_{\exp}(k) = 1 - A^{\frac{k}{N}}, \quad k \geq N \tag{12}$$

Графики из выражений (11), (12), а также визуализация абсолютной и относительной разницы между ними представлены на рисунке 2.

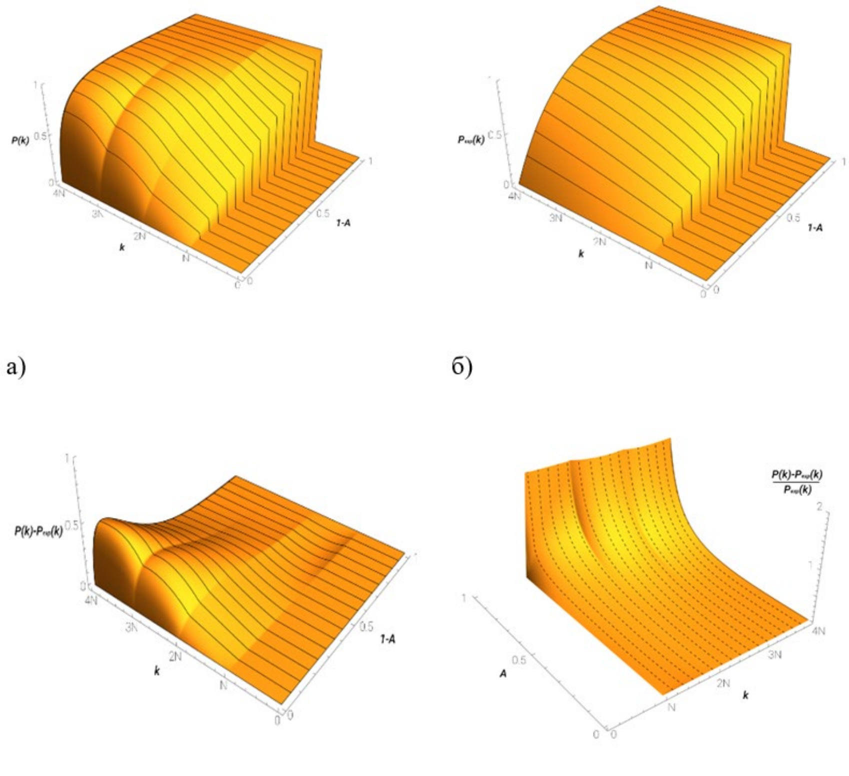

Рис. 2 – Графики визуализация абсолютной и относительной разницы между выражениями (11) и (12)

На первых двух графиках а) и б) сплошные линии – это графики вероятности окончания проекта в зависимости от количества прошедших тактов для разных значений A, причем сетка между графиками согласована. Разница между этими распределениями вероятности не только в угле наклона. Поведение уточненной функции распределения значительно сложнее простой экспоненты. Вероятность окончания проекта имеет локальные минимумы при количестве тактов кратном N. Этот тонкий эффект можно было бы учесть, например, назначая контрольные мероприятия для проекта с периодичностью равной идеальному времени выполнения со сдвигом на полпериода, чтобы в среднем раньше узнавать об успехе проекта.

На третьем графике с) экспоненциальное приближение в общем случае учитывает эффекты, связанные с возможностью предварительной проверки допущений, а область значений k и A, где оно не работает, ограничена. Можно считать это косвенным аргументом в поддержку исследований, где утверждается, что экспоненциальное распределение значительно лучше описывает реальную динамику проектов, чем нормальное вокруг ожидаемого срока выполнения.

На последнем графике д) визуально подтверждается вытекающий из формулы (9) факт, что, если ключевые допущения проекта можно проверять равномерно в ходе его выполнения, а не только после окончания очередной попытки, то среднее время его выполнения значительно сокращается, причем степень этого сокращения неограниченно растет с ростом A.

В рамках проведенного исследования использована математическая модель, в рамках которой проект описывается как марковский процесс в терминах векторов состояния и матрицы эволюции. Рассмотрен, как дискретный случай, так и непрерывный предел. Использование матрицы переходов (1), при сравнительной ее простоте, позволяет получить нетривиальное, согласующееся с опытом, описание развития проекта, зависящего от допущений.

Основной результат исследования - это формула (11) для вероятностного распределения срока окончания проекта, зависящего от допущений. Эта формула (12) уточняет эмпирическую оценку этого распределения. При этом, с одной стороны, совпадение результатов моделирования с эмпирическими наблюдениями в широком диапазоне значений параметров, является подтверждением адекватности модели, а с другой, области расхождения между моделью и эмпирической оценкой указывают на ограничения для применения последней.

Подавляющее большинство работ, посвященных вопросу о том, почему оценки сроков выполнения проектов часто бывают ошибочными, указывают на склонность менеджеров занижать эти оценки [5, 6], однако полученный результат касается другой крайности, когда менеджер, отказываясь от интуитивной, заниженной оценки, старается оценить срок для проекта «объективно», руководствуясь распространенной экспоненциальной моделью, и при этом может получить оценку наоборот завышенную.

Используя формулы (9) и (11), практикующий менеджер может количественно обосновать инвестиции в регулярную проверку допущений, лежащих в основе проекта. Эти формулы позволяют оценить экономическую целесообразность для таких решений, как ужесточение отчетности, переход к бережливому проектному управлению [7], проведение пилотных проектов или разбиение проекта на партии [8].

«В настоящее время востребованность проектных методов управления в разных странах, регионах, территориях расширяется. Это требует актуализации теоретических подходов к проектному управлению, разработки новых технологий и инструментов, поиска и совершенствования практических навыков управления» [9].

Преимуществом использованной математической модели является тот факт, что она позволяет не только рассчитывать средние величины, характеризующие проект, но и следить за распределением их вероятности. Формулу (11) можно использовать для расчетов в рамках различных методов анализа проектов, таких как PERT, которые используют квантили, наиболее вероятные, пессимистичные и оптимистичные прогнозы. «Целесообразность применения классического проектного подхода снижается по причине нетолерантности к текущим изменениям и, как итог, высокого уровня подверженности негативному влиянию внешней среды. Для того, чтобы преодолеть эти недостатки, были разработаны такие гибкие концепции, как Шесть сигм, PRINCE2, Agile, SCRUM, Lean, Kanban» [10].

Применение бережливого подхода в проектном управлении приносит большую пользу, существенно повышая эффективность реализации проектов. В результате проведенного исследования обоснована применимость экспоненциального описания проекта: оно адекватно при низкой и средней вероятности перезапуска, но теряет точность при высоком уровне неопределенности.

Литература

1. Шиков А.Н., Пунтиков А.Н. Систематизация понятий "риск" и "допущение" в проектном управлении и риск-менеджменте // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 4: Промышленные технологии. 2024. № 2. С. 23-32.

2. PeopleCert. PRINCE2® 7 Managing Successful Projects // 2023. 347 p. ISBN 978-9925-34-460-4.

3. Пелевин Е.Е., Цудиков М.Б. Методы проектного менеджмента. Проектный менеджмент в кризисное время // Известия ТулГУ. 2022. № 9. С. 182-191.

4. Голощапова Т.В. Проектный подход в государственном и муниципальном управлении: принципы и эффективность внедрения // ЕГИ. 2024. №3 (53). С.505-510.

5. Flyvbjerg B. Top Ten Behavioral Biases in Project Management: An Overview // Project Management Journal. 2021. Vol. 52. № 6. pp. 531-546.

6. Cohen I., Mandelbaum A., Shtub A. Multi-Project Scheduling and Control: A Process-Based Comparative Study of the Critical Chain Methodology and Some Alternatives // Project Management Journal. 2004. V. 35. pp. 39-50.

7. Аладко О.И., Хайдукова Е.С. Трансформация парадигмы управления организацией в рамках применения бережливого подхода // Лидерство и менеджмент. 2025. №7. С. 1569-1584.

8. Пунтиков А.Н., Шиков А.Н. Алгоритм разбиения проекта на партии при гибких технологиях планирования // Экономика. Право. Инновации. 2023. Т. 4. С. 81-91.

9. Артемова О.В. Проектное управление как современный вид проектной деятельности // Вестник ЧелГУ. 2024. №12 (494). С.116-126.

10. Попова Е.В. Проектный менеджмент в управлении крупными организациями // Экономика строительства. 2023. №5. С. 12-16.

References

1. Shikov A.N., Puntikov A.N. Vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta texnologii i dizajna. Seriya 4: Promy`shlenny`e texnologii. 2024. № 2. pp. 23-32.

2. PeopleCert. PRINCE2® 7 Managing Successful Projects. 2023. 347 p.

3. Pelevin E.E., Czudikov M.B. Izvestiya TulGU. 2022. № 9. pp. 182-191.

4. Goloshhapova T.V. EGI. 2024. №3 (53). pp. 505-510.

5. Flyvbjerg B. Top Ten Behavioral Biases in Project Management: An Overview. Project Management Journal. 2021. Vol. 52. № 6. P. 531-546.

6. Cohen I., Mandelbaum A., Shtub A. Project Management Journal. 2004. V. 35. pp. 39-50.

7. Aladko O.I., Xajdukova E.S. Liderstvo i menedzhment. 2025. №7. pp. 1569-1584.

8. Puntikov A.N., Shikov A.N. Algoritm razbieniya proekta na partii pri gibkix texnologiyax planirovaniya. E`konomika. Pravo. Innovacii. 2023. V. 4. pp. 81-91.

9. Artemova O.V.Vestnik ChelGU. 2024. №12 (494). pp.116-126.

10. Popova E.V. E`konomika stroitel`stva. 2023. №5. pp. 12-16.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 18.10.2025
Дата публикации: 26.11.2025