О граничных условиях расчетной схемы при математическом моделировании литосферной плиты

Е.А. Муравьева, З.К. Алиханов

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация: Для точного моделирования напряженно-деформированного состояния литосферной плиты необходимо корректно задать граничные условия, отражающие взаимодействие с окружающей геологической средой. Краевая задача Дирихле, в данном контексте, предполагает задание перемещений на границе расчетной области. Проблема заключается в том, что истинные перемещения на границе кратона, как правило, неизвестны и могут меняться во времени под воздействием тектонических процессов и изменений нагрузки.
Ключевые слова: граничные условия, напряженно-деформированное состояние, математическое моделирование, модель, литосферная плита, метод конечных элементов, геотектоника, растяжение, сжатие, компьютерное моделирование, астеносфера.

При изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) литосферных плит в задачах физики Земли, как правило, требуется создание вычислительной модели в формате 2D или 3D (что сделать более трудно). При использовании метода конечных элементов (МКЭ) в математическом моделировании литосферные блоки рассматриваются как деформируемые твердые тела. Для точного определения НДС необходимо задать краевые условия расчетной модели. Это условие актуально для всех масштабов моделирования, от небольших участков до литосферных плит [1].

Выбор и обоснование краевых условий – критически важный этап моделирования. Неадекватные краевые условия могут привести к существенным ошибкам в определении НДС и, как следствие, к неверным выводам о поведении литосферных плит под воздействием геофизических факторов [2]. В зависимости от цели исследования и имеющихся данных, краевые условия могут задаваться в виде перемещений, сил, давлений или их комбинаций.

Зачастую при моделировании региональных или глобальных тектонических процессов, на границах моделируемой области задаются перемещения, соответствующие скоростям движения литосферных плит. Эти данные, как правило получены из геодезических наблюдений или геологических данных бурения [3]. Важным аспектом является учет гравитационных сил, оказывающих значительное влияние на НДС литосферы, особенно в условиях сложной рельефной структуры – рифта.

В рамках численного моделирования с использованием МКЭ создается расчетная модель. Как правило некоторые величины на границах не учитываются, а при небольшом смещения принимаются как нулевые. Из этого следует, что искомые параметры a и b должны быть приравнены к нулю. При заданных граничных условиях задача Дирихле рассматривается как объект Лагранжа с граничной областью Липшица, как указано в [4]. Это подразумевает необходимость решения дифференциального уравнения, определенного на границе расчетной области, гарантируя фиксированное значение по всей исследуемой области со степенями свободы, представленными параметрами a и b

$$y'' + y = 0 \quad ; \quad y(a) = \alpha \quad ; \quad y(b) = \beta \tag{1}$$

При математическом анализе крупной геологической среды границы вычислительной области определяются так, чтобы потенциальные деформации в этой зоне не превышали 1 см.

Нередко, малосущественные параметры опускаются, а смещения полагаются нулевыми. Из этого следует, что значения a и b необходимо приравнять к нулю. В случае некорректности установленных граничных условий или если результаты численного моделирования напряженно-деформированного состояния показывают перемещения на границе, превышающие 1 см, необходимо произвести корректировку размеров исследуемой зоны.

В дополнение к задаче Дирихле, используемой для описания границ и их поведения, также применяются граничные условия Коши, Неймана, Гамильтона, Липшица, и другие подходы. Указанные условия применимы для квазистатических режимов функционирования рассматриваемого участка литосферы. Кристаллическое основание литосферной плиты обычно располагается на глубине от 40 до 80 км, иногда достигая границы Мохо, а в отдельных случаях проникает в астеносферу [5].

Фундаментальной основой любой литосферной плиты являются одно- или двухкомпонентные системы, включающие древнейшие элементы земного строения типа зеленокаменнных поясов архейского возраста и т.п. Под воздействием многообразных процессов деформаций, обусловленных комплексом эндогенных и экзогенных факторов, рассматриваемые структурные единицы испытывают широкий спектр механических трансформаций, основными из которых принято считать процессы чистого растяжения и сжатия, характеризующиеся наличием ортотропии в материале исследуемого участка плитового покрова Земли.

Изменения в структуре изучаемой территории носят площадной характер, что требует учёта возможных смещений по периферическим зонам. Для отдельных сегментов литосферы фиксируются горизонтальные перемещения вдоль координатных осей X и Y, обусловленные действием тектонических сил. Края плит ограничены глубинными вертикальными трещинами, находящимися непосредственно под поверхностью Мохоровичича.

Необходимо приложить растягивающую или сжимающую нагрузку, соответствующую уровню действующего тектонического напряжения на определённой глубине залегания породы. Формулировка решаемой задачи предполагает необходимость задания условий жёсткого закрепления границ расчетной области, которое динамически корректируется в зависимости от направления действующих усилий вдоль рассматриваемой оси Y. Начало решения заключается в анализе дифференциальных уравнений в частных производных, дополненных граничными условиями. Общий вид уравнения записывается следующим образом:

$$\nabla^2 y + y = 0 \qquad (2)$$

Здесь ∇^2 обозначает оператор Лапласа, отражающий распределение плотности потенциальных источников векторного поля grad*F*, локализованных в границах рассматриваемого пространства. Этот оператор действует на исследуемую функцию, обеспечивая согласованность ее значений относительно внешних факторов.

Дифференциальное выражение оператора Лапласа (оператор набла скалярного произведения) имеет вид [6]:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (3)$$

где *i, j, k* – ортогональные базисные векторы, задающие направления координатной системы в граничной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Граничные условия формулируются следующим образом:

$$y(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \qquad (4)$$

где *f(x)* — заранее заданная непрерывная функция, определяющая значения искомой функции на границе области $\partial\Omega$.

Переход от стационарных граничных условий к динамическим предполагает использование математического понятия – ротора векторного поля. Ротор является оператором, преобразующим потенциальное векторное поле в направлении приложения упругих консервативных сил:

$$\vec{F} = \nabla U \qquad (5)$$

Здесь $\vec{F}$ – отрицательное значение градиента потенциала \$U\$, соответствующего потенциальному полю силового воздействия. Согласно теории полей, задача с такими условиями допускает применение методов теории струн, описывающих колебания бесконечного натянутого элемента, рассматриваемого в теории Струн [8].

Однако в рамках настоящей работы рассматривается преимущественно классический подход Ньютона, ориентированный на фиксированные геометрические границы в условиях деформируемых структур (например, земной коры). Для моделирования нагрузки применяется векторное поле конечных элементов, расположенных на границе расчетной области и ограниченных Доменом Липшица – поверхностью Липшицевой границы *Γ*. Поверхностный контур определяется криволинейным интегралом:

$$\Gamma = \oint \mathrm{F}\,\partial \mathrm{I} = \oint \left(\mathrm{F_x}\,\partial \mathrm{x} + \mathrm{F_y}\,\partial \mathrm{y} + \mathrm{F_z}\,\partial \mathrm{z}\right) \quad (6)$$

где F – векторное поле, обусловленное краевыми элементами, а $\partial \mathrm{I}$ – элементарный путь интегрирования вдоль границы. В двумерном пространстве компонента вектора F_z=0, а сила нагружения представляется линейной функцией угла наклона и длины элемента:

$$\mathrm{A_1} = \overline{|\vec{\mathrm{F}}|}|\mathrm{l}| \cos \phi = \left(\vec{\mathrm{F}}, \mathrm{l}\right) \quad (7)$$

Пусть нагрузка A_1 прикладывается либо узловой точкой, либо распределяется равномерно по длине участка длиной l. Такое напряжение будет характеризоваться постоянством по направлению и интенсивности во времени и направлено под углом φ относительно оси рассматриваемого отрезка.

Тогда результирующую силу A_{i1}, действующую на область, можно выразить следующим образом:

$$A_{i1} = |A_1| \cdot |l| \cos\varphi = (A_1, l) \quad (8)$$

где (A_i, l) – скалярное произведение векторов нагрузки и направляющего отрезка, $|l|$ – длина участка, φ – угол между направлением силы и осью элемента.

Данная формализация позволяет однозначно определить направление и величину нагрузочного усилия в расчетных моделях геодинамических исследований, учитывая геометрию взаимодействия среды и внешние механические факторы.

Подобное приложение внешней нагрузки актуально лишь для небольших расчетных моделей. Когда речь идет о масштабных структурах, таких как кратоны, архейские зеленокаменные пояса, литосферные плиты, литостатическое давление становится существенно неоднородным и варьируется в широких пределах. К примеру, в Вилюйско-Якутском прогибе зафиксированы значения давления от 0 до 230 МПа [9]. Особенностью распределения нагрузок является резкое изменение величины напряжения на границах соприкосновения разнородных геологических конструкций.

Следовательно, замена жесткой фиксации границ путем наложения указанного выше вектора ротора должна учитывать пространственное распределение действующих сил. Это подразумевает переход к решению трехмерных задач, применяя концепцию дивергенции векторного поля, выражаемую формулой:

$$\mathrm{div}F = \nabla F \tag{9}$$

Формула (9) позволяет учесть локальные изменения напряженности поля и эффективно моделировать воздействие неравномерных нагрузок на границы пластичных материалов, образующих земную кору. Такой подход обеспечивает адекватное воспроизведение реальных процессов, происходящих внутри планетарной структуры, и способствует повышению точности вычислительных экспериментов в изучении механических свойств крупных геологических объектов [10].

Далее закрепляя расчетную схему крупного геологического элемента нагрузкой (равномерно или неравномерно распределенной) по оси *X* можно получить выше определённый ротор:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{a}|_{\mathrm{г}} = \lim_{\Omega\to 0} \oint_{\Omega} \left[\partial\Omega \cdot \vec{\mathrm{F}}\right] \Big/ \mathrm{V} \tag{10}$$

Отсюда можно выразить литостатическую нагрузку (7) как ротор:

$$A_2 = \lim_{\max|\nabla l_{ii}|\to 0} \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{rot}\, a|_{\Gamma} \cdot \nabla l_{ii} \quad (11)$$

Исследование показало необходимость учитывать смещение границ расчетной области под воздействием внешних нагрузок.

Основные результаты:

- Применение лапласиана улучшает представление распределения потенциала поля.
- Анализ ротора необходим для трансформации потенциала в условиях изменения краевых условий.
- Моделирование внешней нагрузки осуществляется через векторное поле конечных элементов, обеспечивая точное определение силы.
- Использование дивергенции повышает точность расчета интенсивностей полей.

Разработанный подход способствует изучению механических процессов крупных геологических структур, таких как кратоны, архейские зеленокаменные пояса и т.д..

Литература

1. Манько А.В., Корягина А.И. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния южной части Сибирского кратона // Инженерный вестник Дона. 2024. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9127.

2. Rukavishnikov A.V. Weighted Analogue of LBB Conditions for Solving the Stokes Problem with Model Boundary Conditions in a Domain with Singularity // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2025. Vol. 18, No. 1. Pp. 91-99.

3. Закавова А.А., Манько А.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния реконструируемого Кузнецовского тоннеля // Инженерный вестник Дона. 2024. № 5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2024/9211.

4. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001. 300 с.

5. Спичак В.В. Электромагнитная томография земных недр: Центр геоэлектромагнитных исследований Института физики Земли РАН. М.: Научный мир, 2019. 374 с.

6. Левчук Т.В. Элементы векторного анализа в задачах на механику деформируемых сред М.: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Российский университет транспорта", 2021. 121 с.

7. Polchinski J. String Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 424 p.

8. Ахметов А.Ж., Смолин И.Ю. Компьютерное моделирование напряженно деформированного состояния Тунгусской синеклизы и Якутско-Вилюйской крупной изверженной провинции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 52-66. DOI 10.17223/19988621/75/5.

9. Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи механики разрушения. М.: URSS, 2010. 543 с.

References

1. Manko A.V., Koryagina A.I. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2024/9127.

2. Rukavishnikov A. V. Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2025. Vol. 18, No. 1. P. 91-99.

3. Zakavova A.A., Manko A.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024. № 5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2024/9211.

4. Golovanov A.I., Berezhnoj D.V. Metod konechnyh jelementov v mehanike deformiruemyh tverdyh tel [Finite element method in the mechanics of deformable solids]. Kazan: DAS, 2001. 300 p.

5. Spichak V.V. Jelektromagnitnaja tomografija zemnyh nedr: Centr geojelektromagnitnyh issledovanij Instituta fiziki Zemli RAN. [Electromagnetic tomography of the Earth's interior: Center for Geoelectromagnetic Research, Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences]. M.: Nauchnyj mir, 2019. 374 p.

6. Levchuk T.V. Jelementy vektornogo analiza v zadachah na mehaniku deformiruemyh sred [Elements of vector analysis in problems of the mechanics of deformable media]. M.: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Russian University of Transport," 2021. 121 p.

7. Polchinski J. String Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 424 p.

8. Akhmetov A.Zh., Smolin I.Yu. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika [Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics]. 2022. № 75. S. 52-66. DOI 10.17223/19988621/75/5.

9. Morozov E.M., Zernin M.V. Kontaktnye zadachi mehaniki razrushenija [Contact problems of fracture mechanics]. M.: URSS, 2010. 543 p.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 18.10.2025

Дата публикации: 27.11.2025