

Геометрическая гипотеза в задаче о поле направлений трещин

С.О. Курнавина

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: Рассматривается влияние геометрической гипотезы на поле направлений трещин в расчете конструкций по наклонным сечениям. Угол наклона трещины к вертикали находится из условия минимума внешней нагрузки, необходимой для ее формирования и определяемой в свою очередь из уравнения энергетического баланса. Проведена оценка влияния коэффициента A гипотезы билинейных сечений на угол наклона трещины для случаев действия равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы. По результатам расчета сделан вывод о том, что влияние геометрической гипотезы в случае действия равномерно распределенной нагрузки незначительно, а в случае действия сосредоточенной силы ее влияние наиболее значительно в средней части пролета среза при отношении пролета среза к высоте сечения больше 2. По результатам численных расчетов моделей шарнирно опертых балок получена зависимость коэффициента A от относительной координаты начала трещины для различной интенсивности поперечного армирования.

Ключевые слова: наклонные сечения, геометрическая гипотеза, поле направлений трещин, уравнение энергетического баланса.

Введение

Значительная часть изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных конструкций в процессе эксплуатации работает на восприятие поперечных сил. При этом несущая способность подобных элементов определяется большим числом факторов, как внешних: условиями опирания, схемой и режимом нагружения конструкции, так и внутренних, таких, как: количеством и расположением продольной и поперечной арматуры, наличием предварительного напряжения, классом бетона и арматуры, геометрическими размерами конструкции, наличием предварительного напряжения и др. [1- 3].

Важнейшей задачей в данном случае является выбор адекватной расчетной модели. В основе европейских норм лежит так называемая «ферменная аналогия» [4-6], согласно которой железобетонные изгибаемые элементы заменяются раскосной фермой, в которой роль верхнего пояса играет бетон сжатой зоны, нижнего пояса – растянутая продольная арматура,

роль стоек – поперечная арматура, которая заменяется равномерно распределенным вертикальным напряжением, а роль воображаемых раскосов – наклонные сжатые полосы бетона, заменяемые равномерно распределенным сжимающим напряжением. Проекция наклонного сечения определяется через тангенс угла наклона раскосов к горизонтали θ , который изменяется в пределах от 22° до 45° [7, 8].

В основе Российских норм лежит модель, основанная на рассмотрении равновесия условного блока над наклонной трещиной, причем расчеты на поперечную силу и на изгибающий момент, соответствующие различным механизмам разрушения, проводятся независимо. При этом расчетная проекция наклонного сечения, которая является одной из важнейших величин, лежащих в основе расчета, определяется из условия минимума несущей способности по наклонному сечению. Многочисленные исследования в данной области в основном направлены на дальнейшее совершенствование «блочной» модели [9-11]. Во всех расчетных моделях траектория развития трещины, угол ее наклона и, соответственно, расчетная проекция наклонного сечения является одним из основополагающих факторов [12,13].

Метод

В. И. Жарницким предложен энергетический метод решения задачи определения единственно возможного направления развития трещины из конкретной точки по пролету балки для произвольной схемы приложения нагрузки. Трещина в этом случае аппроксимируется прямой линией, а угол ее наклона определяется из условия минимума внешней нагрузки, необходимой для ее формирования.

Значение этой нагрузки можно выразить через величину максимального изгибающего момента M^* и функцию формы эпюры

моментов $\Phi(x)$. Расчетный угол наклона трещины к вертикали α (рис. 1) определяется из условия (1):

$$\frac{\partial M^*}{\partial \alpha} = 0, \quad (1)$$

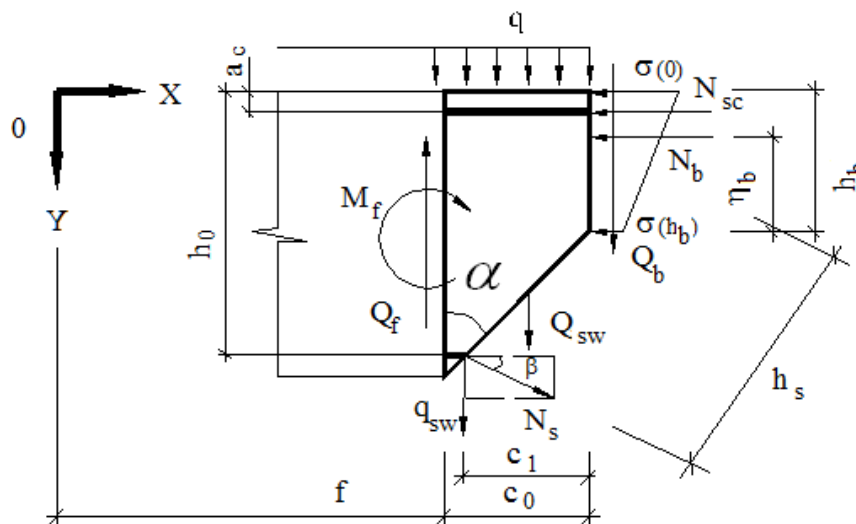


Рис. 1. – Схема усилий в трапецидальном элементе над наклонной трещиной

Величина M^* находится из уравнения энергетического баланса и уравнений равновесия блока над трещиной с учетом напряженно-деформированного состояния бетона сжатой зоны [14-16].

$$W_s + W_{sc} + W_{sw} + W_{sh} + W_{bt} + W_{bc} = A_q, \quad (2)$$

где W_s – потенциальная энергия деформирования растянутой продольной арматуры, W_{sc} , W_{sw} – то же для сжатой и поперечной арматуры. W_{bc} – потенциальная энергия деформирования сжатого бетона над трещиной, W_{bt} – энергия разрушения растянутого бетона, W_{sh} – энергия сдвига бетона над трещиной, A_q – работа внешней нагрузки.

Для задания связи напряжений и деформаций в сечениях В.И. Жарницким сформулирована геометрическая гипотеза билинейных сечений, согласно которой эпюра деформаций в нормальном сечении аппроксимируется не линейной, как в гипотезе плоских сечений, а

билинейной зависимостью. Несоблюдение гипотезы плоских сечений в процессе развития пластических деформаций в бетоне и в арматуре подтверждается рядом численных расчетов и экспериментальными исследованиями [14, 17, 18].

В ломаном сечении, проведенном по наклонной трещине в вершине трещины (в точке излома сечения $y = h_b$) напряжения, а соответственно и деформации по оси X изменяются скачком (рис. 2). Гипотеза билинейных сечений для ломаного сечения имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(y) &= \varepsilon_x(h_b) + A \cdot (y - h_b) \cdot \chi & 0 \leq y \leq h_b \\ \varepsilon_x(y) &= (y - h_b) \cdot \chi & h_b \leq y \leq h \end{aligned} \quad (3)$$

где A – коэффициент излома эпюры деформаций (определяется эмпирически или численно), χ – кривизна, h_b – высота сжатой зоны бетона над трещиной, h – высота сечения

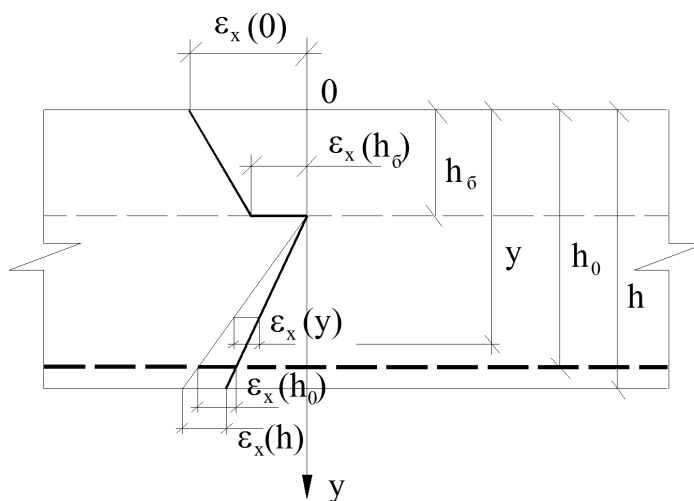


Рис. 2. – Гипотеза билинейных сечений для ломаного сечения.

В настоящее время отсутствуют экспериментальные данные о величине коэффициента A для наклонных сечений за исключением эксперимента, проводившегося для консольных балок [14, 15]. По результатам испытаний установлено, что для условий эксперимента величину коэффициента A можно принять равной 2. Однако полученный объем экспериментальных данных явно недостаточен. Кроме того, данные

являются приближительными из-за неточности метода их определения.

Поскольку геометрическая гипотеза лежит в основе задачи о поле направлений трещин необходимо, прежде всего, оценить ее влияние на возможный угол наклона трещины. Для этого по формуле (2) проведены расчеты угла наклона трещин по пролету шарнирно опертой балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, с размерами поперечного сечения 400×200 мм, бетон класса В25. Продольное армирование принято симметричным $2 \varnothing 12$ мм А500. Поперечное армирование в приопорной зоне принято в виде $2 \varnothing 6$ мм с шагом 150 мм. В процессе расчета все параметры оставались неизменными, и варьировался только коэффициент А гипотезы билинейных сечений в формуле (3) в пределах от 1.0 до 3.0.

В табл.1 показаны результаты расчетов угла наклона трещины к вертикали α для балок с отношением пролета к высоте сечения равным 7.5, 11.5 и 15.

Таблица № 1

Влияние коэффициента А гипотезы билинейных сечений на теоретический угол наклона трещины в шарнирно опертой балке

Отношение пролета балки к высоте сечения									
f/l	$l/h = 7.5$			$l/h = 11.5$			$l/h = 15$		
	Величина коэффициента А								
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0	55	55	56	56	57	58	57	58	58
0.1	42	42	43	39	39	40	35	36	36
0.2	29	29	29	24	24	24	20	20	19
0.3	18	17	17	14	14	13	11	11	10
0.4	8	8	8	6	6	6	5	5	5

В таблице f – расстояние до начала наклонного сечения от опоры, l – пролет балки, h – высота поперечного сечения.

Как видно из таблицы, коэффициент, характеризующий степень излома эпюры деформаций по высоте сечения, практически не влияет на угол наклона трещины в случае действия равномерно распределенной нагрузки.

Также проводились расчеты консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце, с различным соотношением высоты к пролету среза. На рис. 3. представлены безразмерные зависимости угла наклона трещины к вертикали α в консоли без поперечной арматуры (так как для балок без поперечной арматуры влияние коэффициента A наиболее значительно) для различных отношений пролета среза к высоте балки l_{cp}/h .

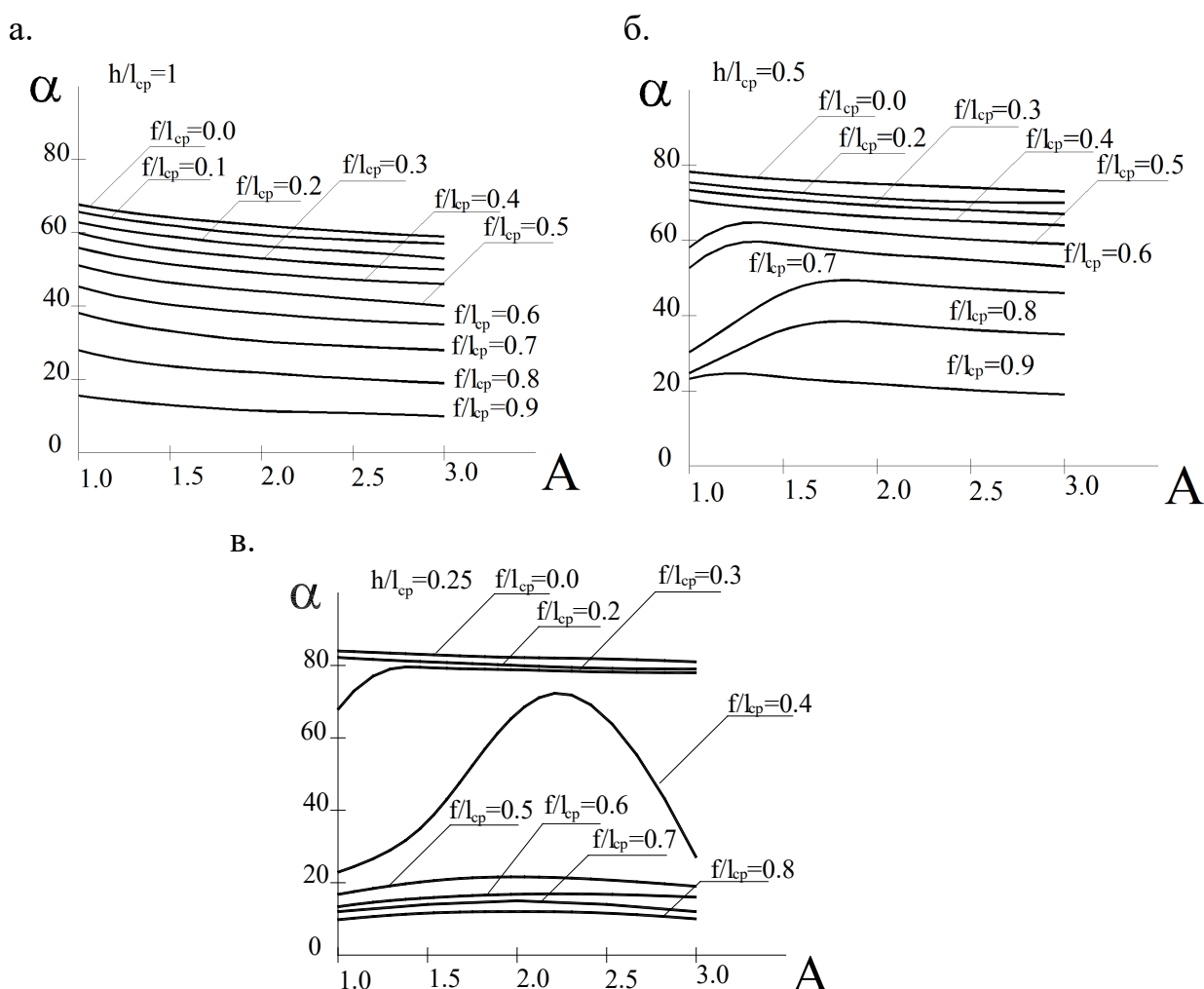


Рис. 3. – Зависимость угла наклона трещины α от коэффициента A в консольной балке без поперечной арматуры: а – $h/l_{cp} = 1$, б – $h/l_{cp} = 0.5$, в – $h/l_{cp} =$

На графиках f - это расстояние от точки приложения сосредоточенной силы до истока наклонной трещины на растянутой грани.

Как показывают результаты расчета, в случае действия сосредоточенной силы величина коэффициента A оказывает наиболее существенное влияние на угол наклона трещины средней части пролета среза ($0.4 \dots 0.8 l_{cp}$), при отношении $l_{cp}/h \geq 2$

Результаты и обсуждение

Для определения характера распределения коэффициента A по пролету среза проведен расчет моделей шарнирно опертых балок на действие двух монотонно возрастающих сосредоточенных сил, действующих на две грузораспределительные пластины. Расчет проводился с учетом физической нелинейности материалов в ПК Simula Abaqus. В моделях балок принят бетон класса В25, продольная и поперечная арматура класса А500.

Высота поперечного сечения балок 400 мм, ширина сечения - 200 мм, верхнее и нижнее продольное армирование $2 \varnothing 12$ мм (рис. 4 а). Пролет балок - 4.5 м, пролет среза составил 1.5 м (отношение $l_{cp}/h = 3.75$). Поперечное армирование в приопорной зоне принято в трех вариантах:

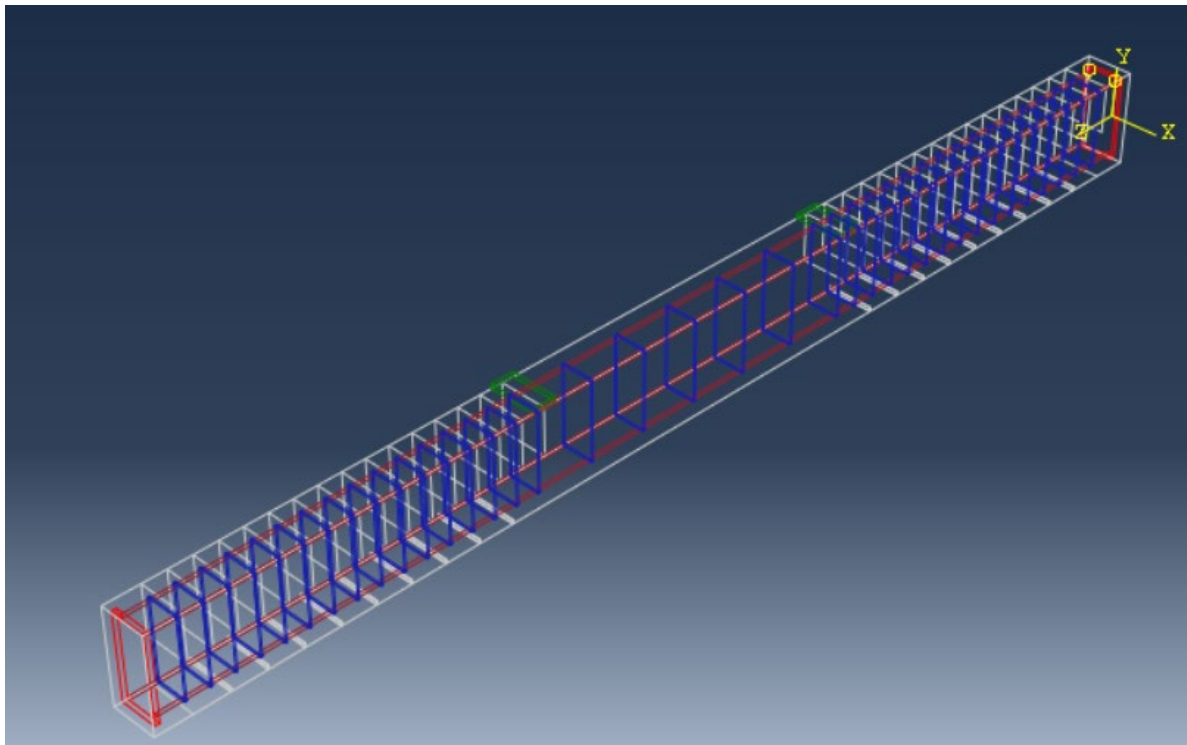
- 1 – балка без поперечной арматуры;
- 2 – поперечная арматура $2 \varnothing 6$ мм с шагом 150 мм;
- 3 – поперечная арматура $2 \varnothing 6$ мм с шагом 100 мм

По нижней грани балок между опорами и грузораспределительными пластинами моделировались прорези в защитном слое бетона с шагом $1/10$ пролета среза, играющие роль «инициаторов» наклонных трещин (рис. 4 б).

Сами балки, продольная и поперечная арматура моделировались объемными конечными элементами. Для моделирования балки использована модель бетона с повреждениями «concrete damaged plasticity». Форма диаграммы определялась в соответствии с Приложением Г СП 63.13330.2018.

Работа продольной и поперечной арматуры моделировалась билинейной диаграммой, включающей упругий и пластический участки.

а.



б.

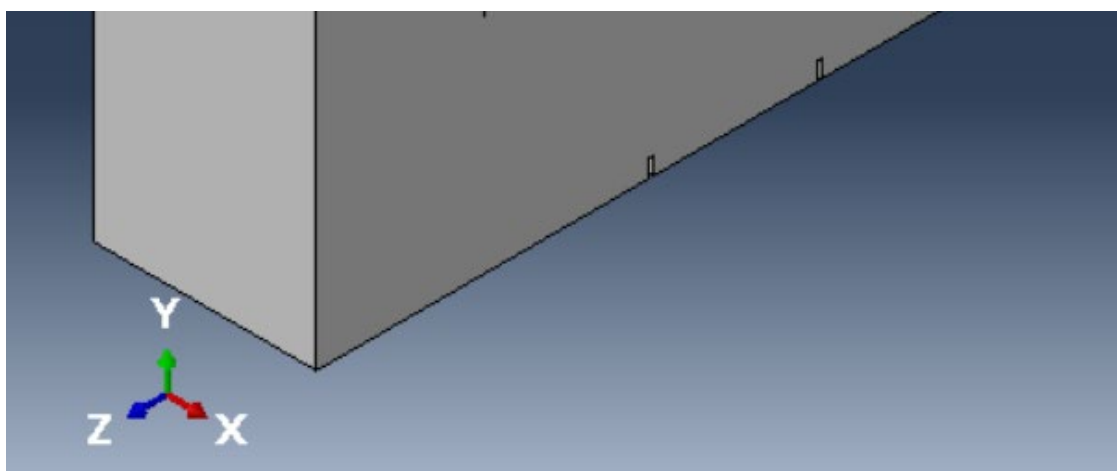


Рис. 4. – Модель балки (вариант 3): а – общий вид и схема армирования, б - «инициаторы» наклонных трещин в растянутой зоне.

Для предотвращения проскальзывания арматуры и образования горизонтальных трещин вдоль продольных арматурных стержней по их торцам смоделированы анкерующие пластины размером $360 \times 160 \times 20$ мм.

Определить значение коэффициента A , входящего в формулу (2), можно только приближенно: и вследствие неравномерного распределения деформаций по ширине сечения, и в связи с тем, что его значение меняется в процессе нагружения [18]. В данном исследовании напряженно-деформированное состояние сечений, совпадающих с наклонными трещинами, рассматривалось в момент, когда останавливалось интенсивное распространение трещины по высоте сечения. Значение деформаций бетона принималось средним по ширине сечения, а деформаций арматуры – средним по площади стержней над «инициатором».

Траектория трещины аппроксимировалась прямой линией, соединяющей ее начальную и конечную точку. Картина трещинообразования в балке 1 представлена на рис. 5.

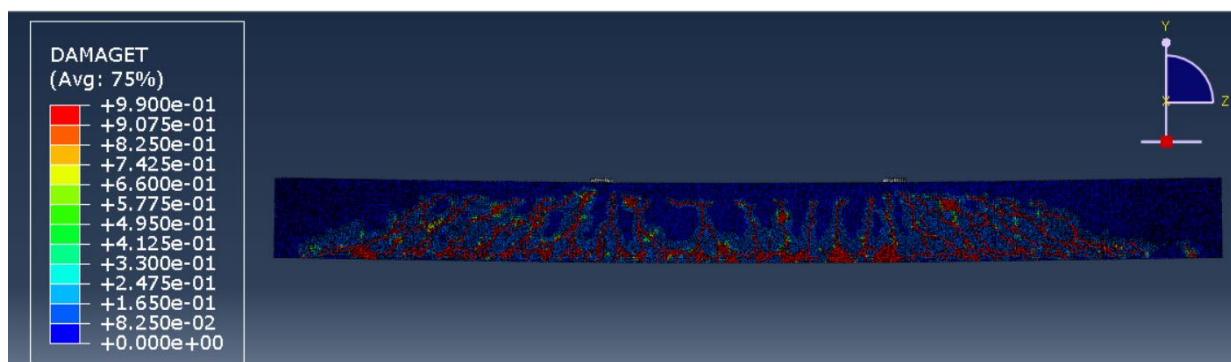


Рис. 5. – Картина трещинообразования в балке (вариант 2) к моменту начала текучести в продольной арматуре.

На рис. 6 представлены графики распределения коэффициента A в зависимости от отношения координаты начала трещины к пролету среза балки. Во всех трех случаях величина коэффициента уменьшается для трещин в середине пролета среза и увеличивается по направлению к опоре и к точке приложения нагрузки. Для балки без поперечной арматуры значения коэффициента A до 70% выше, чем для балок с поперечным армированием.

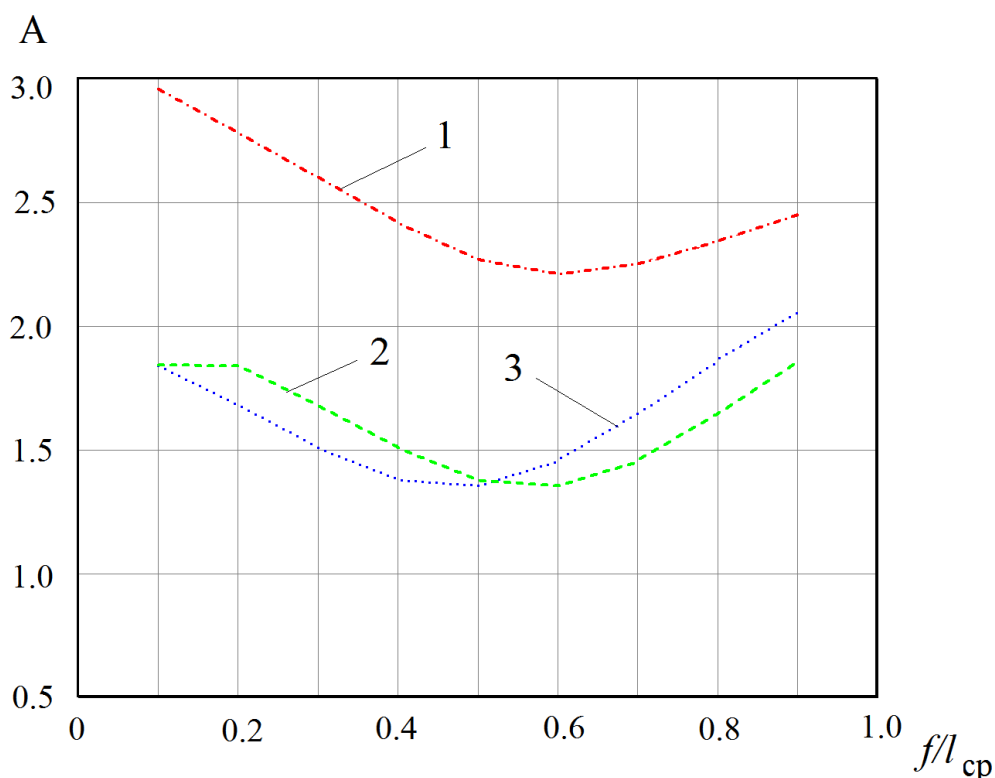


Рис. 6. – Зависимость коэффициента A гипотезы билинейных сечений от относительной координаты начала трещины: 1 - $\mu_{sw}/\mu_s = 0$, 2 - $\mu_{sw}/\mu_s = 0.605$, 3 - $\mu_{sw}/\mu_s = 0.908$.

Полученные графики можно аппроксимировать параболической зависимостью

$$A\left(\frac{f}{l}\right) = a \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{f}{l}\right) + c \quad (4)$$

Значения коэффициентов для трех вариантов представлены в табл. 2

Таблица № 2

Значения коэффициентов в формуле (4) в зависимости от интенсивности поперечного армирования.

μ_{sw}/μ_s	a	b	c
0	3.166	-3.954	3.445
0.605	4.071	-3.94	2.307
0.908	4.179	-4.558	2.585

Заключение

По результатам исследований, можно сделать следующие выводы:

1. Влияние коэффициента A на расчетный угол наклона трещины к вертикали в случае действия равномерно распределенной нагрузки незначительно. В случае действия сосредоточенной силы этот коэффициент оказывает наиболее существенное влияние на угол наклона трещины средней части пролета среза ($0.4 \dots 0.8 l_{cp}$), при отношении $l_{cp}/h \geq 2$.
2. Получена зависимость коэффициента A от координаты начала трещины для случая действия сосредоточенной силы ($l_{cp}/h \geq 2$) для различной интенсивности поперечного армирования.

Литература

1. Залесов А.С., Климов Ю.А. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил // «Будивэльныйк», 1989. 104 с.
2. Шипулин С.А., Беяева З.В., Миронова Л.И. Расчет железобетонных элементов по прочности наклонных сечений при двухосевом действии поперечных сил // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2023. № 8. С.16-
3. Yu-Fei Wu, ASCE M., Biao Hu Shear Strength Components in Reinforced Concrete Members // Journal of Structural Engineering. 2017. No 143 (9). DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001832.
4. Назаров М.А., Кицаев М.Ю., Зимин С.С. Методики расчета несущей способности по наклонным сечениям // Alfabuild. 2019. No. 5. Pp 44-52.
5. Алмазов В.О. Проектирование железобетонных конструкций по Евронормам // Москва. Изд. АСВ. 2011. 215 с.
6. Щербач, А. В. Методы расчета железобетонных элементов по наклонным сечениям // Напрягающие цементы, бетоны и самонапряженные

конструкции: сборник трудов Международной научно-практической конференции, Брест, 18–20 декабря 2000 г. / Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет ; Брест : БрГТУ, 2001. С. 171–184.

7. Manar A. A., Mansour T. M. Modelling of Shear Strength for Reinforced Concrete Beams Provided with Side-Face Reinforcement in Dependence of Crack Inclination Angle // International Journal of Engineering and Advanced Technology. 2019. Vol. 8. Issue 6. pp. 3941-3950 DOI: 10.35940/ijeat.F9059.088619

8. Michael P., Collinz Evan C., Bentz Edward G., Sherwood Liping Xie An adequate theory for the shear strength of reinforced concrete structures// Magazine of Concrete Research. 2008. pp. 75-93 DOI: 10.1680/macr.2008.60.9.635

9. Старишко И.Н. Новое направление по расчету прочности изгибаемых железобетонных элементов по наклонным сечениям с примером расчета опытной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 5. С. 479–499

10. Ле Куанг Хюи Расчет прочности наклонных сечений изгибаемых железобетонных элементов без поперечной арматуры // Инженерный вестник Дона. 2024. №7. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2024/9394

11. Филатов В.Б., Блинкова Е.В. Расчетная модель наклонного сечения изгибаемого железобетонного элемента без поперечной арматуры // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. том 15. 2013 № 6(2). С.517-520

12. Caprinteri A., Carmona J.R., Ventura G. Propagation of flexural and shear cracks through reinforced concrete beams by the bridge crack model Magazine of concrete research, 2007. 59 No 10. December. DOI: 10.1680/macr.2007.59.10.743

13. Тур В.В., Щербач А. В. К определению угла наклона диагональных трещин при расчете прочности железобетонных сборно-монолитных элементов на совместное действие изгибающих моментов и поперечных сил // Материалы XI Международного научно-методического межвузовского семинара, Брест. Министерство образования Республики Беларусь, Брестский государственный технический университет, 2004. Часть 1. С. 179–184.
 14. Жарницкий В.И., Беликов А.А., Курнавина С.О. Экспериментальные исследования сопротивления железобетонных балок перерезывающей силе // Промышленное и гражданское строительство. 2011. № 3. С. 18-20
 15. Жарницкий В.И., Курнавина С.О. Энергетический метод определения поля направления трещин в железобетонных балках // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2018. № 5 (377). С. 213-216
 16. Garnytsky V. J. 2014 Shear strength of reinforced concrete structures along the sections, coincident with a field of inclined cracks - Moscow: III All Russian (II International) Conference on concrete and reinforced concrete «Concrete and reinforced concrete – glance at future» Vol 1. pp.27-38
 17. Курнавина С. О., Цацулин И. В. Особенности деформирования сечений изгибаемых железобетонных элементов при действии нагрузок большой интенсивности // Строительство и реконструкция. 2023. № 3(107). С. 3-16. DOI: 10.33979/2073-7416-2023-107-3-3-16
 18. Курнавина С. О., Цацулин И. В. Геометрическая гипотеза для нормальных сечений изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных элементов // Строительство и реконструкция. 2025. № 2(118). С.33-43 DOI: 10.33979/2073-7416-2025-118-2-33-43
-

References

1. Zalesov A.S. Klimov Ju. A. Prochnost' zhelezobetonnyh konstrukcij pri dejstvii poperechnyh sil [The strength of reinforced concrete structures under the action of transverse forces]. «Budivel'nyk», 1989. 104 p.
2. Shipulin S.A., Belyaeva Z.V., Mironova L.I. Vestnik BGTU im. V.G. Shuhova. 2023. No 8. pp.16-30.
3. Yu-Fei Wu, ASCE M., Biao Hu Journal of Structural Engineering. 2017. No 143 (9). DOI: 10.1061/ (ASCE)ST.1943-541X.0001832.
4. Nazarov M.A., Kicaev M.Yu., Zimin S.S. Alfabuild. 2019. No. 5. pp 44-52.
5. Almazov V.O. Proektirovanie zhelezobetonnyh konstrukcij po Evronormam [Design of reinforced concrete structures according to European standards]. Moskva. ASV. 2011. 215 p.
6. Shcherbach A. V. [Napryagayushchie cementy, betony i samonapryazhennyye konstrukcii: sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii]. Brest: 2000. Ministerstvo obrazovaniya Respubliki Belarus', Brestskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2001. pp. 171–184.
7. Manar A. A., Mansour T. M. International Journal of Engineering and Advanced Technology. 2019. Vol. 8. Issue 6. pp. 3941-3950. DOI: 10.35940/ijeat.F9059.088619
8. Michael P., Collinz Evan C., Bentz Edward G., Sherwood Liping Xie Magazine of Concrete Research. 2008. pp. 75-93. DOI: 10.1680/macr.2008.60.9.635
9. Starishko I.N. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij 2021. Vol. 17. No. 5. pp. 479–499.
10. Le Kuang Xyui Inzhenernyj vestnik Dona. 2024. №7. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2024/9394
11. Filatov V.B., Blinkova E.V. Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. tom 15. 2013 № 6(2). pp.517-520.

12. Caprinteri A., Carmona J.R., Ventura G. Magazine of concrete research, 2007. 59 No 10. December. DOI: 10.1680/macr.2007.59.10.743
13. Tur V.V., Shherbach A. B. Materialy` XI Mezhdunarodnogo nauchno-metodicheskogo mezhvuzovskogo seminara, Brest. Ministerstvo obrazovaniya Respubliki Belarus`, Brestskij gosudarstvenny`j texniceskij universitet, 2004. Chast` 1. pp. 179–184.
14. Zharnickij V.I., Belikov A.A., Kurnavina S.O. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2011. No. 3. pp. 18-20.
15. Zharnickij V.I., Kurnavina S.O. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Tekhnologiya tekstil'noj promyshlennosti. 2018. No. 5 (377). pp. 213-216.
16. Garnytsky V. J. 2014 Moscow: III All Russian (II International) Conference on concrete and reinforced concrete «Concrete and reinforced concrete – glance at future». Vol 1 pp.27-38.
17. Kurnavina S. O., Tsatsulin I. V. Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2023. No. 3(107). pp. 3-16. DOI 10.33979/2073-7416-2023-107-3-3-16.
18. Kurnavina S. O., Tsatsulin I. V. Stroitel'stvo i rekonstrukciya 2025. No 2(118). pp.33-43. DOI: 10.33979/2073-7416-2025-118-2-33-43.

Дата поступления: 12.08.2025

Дата публикации: 25.09.25