

Синтез фильтра Калмана для управления асимметричным квадрокоптером с оптимизацией отношения ковариационных матриц

Х. Фам Чонг¹, А.А. Шилин¹, А.С. Гирник¹, М.Т. Нгуен²

¹Томский политехнический университет, г. Томск

²Российский технологический университет

Аннотация: Работа посвящена применению линейного фильтра Калмана (ФК) для оценки угла крена квадрокоптера с конструктивной асимметрией, при которой управляющее воздействие имеет ненулевую постоянную составляющую. Это нарушает стандартное предположение о нулевом математическом ожидании и снижает эффективность традиционных реализаций ФК. Предложен метод синтеза фильтра на основе оптимизации отношения ковариационных матриц с использованием критерия, учитывающего среднеквадратичную ошибку и время переходного процесса. Эффективность подхода подтверждена имитационными и натурными экспериментами на установке с IMU-6050 и Arduino Nano. Полученные результаты подтвердили, что предлагаемый фильтр Калмана обеспечивает повышенную точность оценок угла и угловой скорости, что упрощает его настройку для асимметричных динамических систем.

Ключевые слова: Фильтр Калмана, квадрокоптер с асимметрией, оптимизация ковариационных матриц, функционала со среднеквадратичной ошибкой и временем процесса, комплиментарный фильтр, управление креном и тангажем.

Введение

В задачах оценки углов крена и тангажа квадрокоптера традиционно применяются фильтр Калмана (ФК) для линейных систем и расширенный фильтр Калмана (РФК) для нелинейных [1]. РФК позволяет учитывать нелинейность, однако требует полной математической модели и регулярной процедуры линеаризации с использованием Якобиана, что оправдано лишь при высоком соответствии модели и объекта. В условиях неопределённости параметров реализация РФК оказывается крайне затруднительной, поэтому на практике чаще используют линейный ФК с коэффициентами, зависящими от текущего состояния системы.

При этом важным условием корректной работы линейного ФК является равенство математического ожидания управляющего сигнала нулю в точке равновесного состояния [2]. На практике выполнение данного условия затруднено из-за асимметрии конструкции, вызванной неравномерным

распределением массы, аэродинамическими несоответствиями винтов, а также наличием постоянных возмущений. В задачах управления подобные несоответствия компенсируются с использованием ПИД-регуляторов [3], однако наличие ненулевых постоянных составляющих существенно затрудняет применение ФК.

Одним из способов учета рассогласования модели и объекта является настройка ковариационных матриц ошибок процесса Q и измерений R . Для решения этой задачи были предложены различные подходы, в том числе метод максимального правдоподобия [4], адаптивного подхода [5] и ЕМ-алгоритма [6]. Однако данные методы отличаются высокой вычислительной сложностью, что затрудняет их использование на микроконтроллерах и также снижает эффективность при быстрых изменениях параметров. Вместе с тем в ряде работ [7, 8] исследуются соотношения между матрицами Q и R , а также отношение их определителей, которое имеет ясный физический смысл: увеличение отношения уменьшает доверие к модели и повышает доверие к измерениям, и наоборот. Таким образом, работа посвящена обеспечению оптимального функционирования фильтра Калмана в условиях конструктивной асимметрии квадрокоптера.

Построение математической модели контура управления креном

При анализе системы управления квадрокоптером основное внимание сосредоточено на математической модели, пример которой может быть заимствован из работ [9, 10]. В рамках данной модели формируется вектор, включающий суммарную силу тяги F и моменты M_ϕ , M_θ , M_ψ , представленный в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} F \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_{21} & l_{22} & -l_{23} & -l_{24} \\ l_{31} & -l_{32} & -l_{33} & l_{34} \\ K_d & -K_d & K_d & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Следует отметить, что расстояния от каждого двигателя до центра масс l_{ij} ($i \in (2,3), j \in (1,2,3,4)$) в большинстве научных работ [9, 10] принимаются равными, что предполагает абсолютную симметричность корпуса квадрокоптера. Коэффициент сопротивления K_d каждого двигателя по оси z обеспечивает управляемость по углу рыскания ψ .

Выделим ту часть модели из [9, 10], которая связана с контурами управления углами тангажа и крена. Учитывая (1), получим математическую модель по этим углам (2).

$$\begin{cases} \ddot{\Phi} = \left(\frac{l_{21}K_{1b}}{J_{1x}} \omega_1^2 + \frac{l_{22}K_{2b}}{J_{2x}} \omega_2^2 \right) - \left(\frac{l_{23}K_{3b}}{J_{3x}} \omega_3^2 + \frac{l_{24}K_{4b}}{J_{4x}} \omega_4^2 \right), \\ \ddot{\Theta} = \left(\frac{l_{31}K_{1b}}{J_{1y}} \omega_1^2 + \frac{l_{34}K_{4b}}{J_{4y}} \omega_4^2 \right) - \left(\frac{l_{32}K_{2b}}{J_{2y}} \omega_2^2 + \frac{l_{33}K_{3b}}{J_{3y}} \omega_3^2 \right). \end{cases} \quad (2)$$

Следует отметить, что для симметричных конструкций данное выражение в большинстве работ представлено более простыми формулами:

$$\begin{cases} \ddot{\Phi} = \frac{lK_b}{J_x} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2), \\ \ddot{\Theta} = \frac{lK_b}{J_y} (\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2). \end{cases} \quad (3)$$

Однако в случае конструктивной асимметрии вместо традиционного выражения (3) необходимо применять выражение (2), что проявляется даже в равновесном состоянии всех четырёх контуров управления. Если предположить, что асимметрия не влияет на работу контура крена, то все частоты вращения должны быть равны в равновесном состоянии. Тогда, в соответствии с (2), динамика по углу крена соответствует выражению:

$$\ddot{\Theta} = \left(\left(\frac{l_{31}K_{1b}}{J_{1y}} + \frac{l_{34}K_{4b}}{J_{4y}} \right) - \left(\frac{l_{32}K_{2b}}{J_{2y}} + \frac{l_{33}K_{3b}}{J_{3y}} \right) \right) \omega^2,$$

которое не равно нулю при имеющемся различии в параметрах l , K_b , J_{xy} . Следовательно, асимметрия влияет на управляющий сигнал, который следует рассматривать как сумму вариационной и постоянной составляющих.

Наличие постоянной составляющей в управлении контуром крена не позволяет корректно применять ФК, даже если на действующем квадрокоптере контуры управления работают корректно.

Далее, полагая, что нелинейная зависимость монотонная, то неопределенность в значениях параметров могут быть представлены простыми граничными условиями:

$$K_{vf} \in [f(m_{max}, l_{min}, J_{max}), f(m_{min}, l_{max}, J_{min})]. \quad (4)$$

Для постановки задачи синтеза ФК и обеспечения его работы вблизи равновесного состояния вместо традиционного ПИД-регулятора применим эквивалентную структуру (рис. 1) в виде ПД и ПД-ПИ регуляторов. Такой подход к построению системы управления позволяет использовать вариативную составляющую сигнала управления u_0 с нулевым математическим ожиданием.

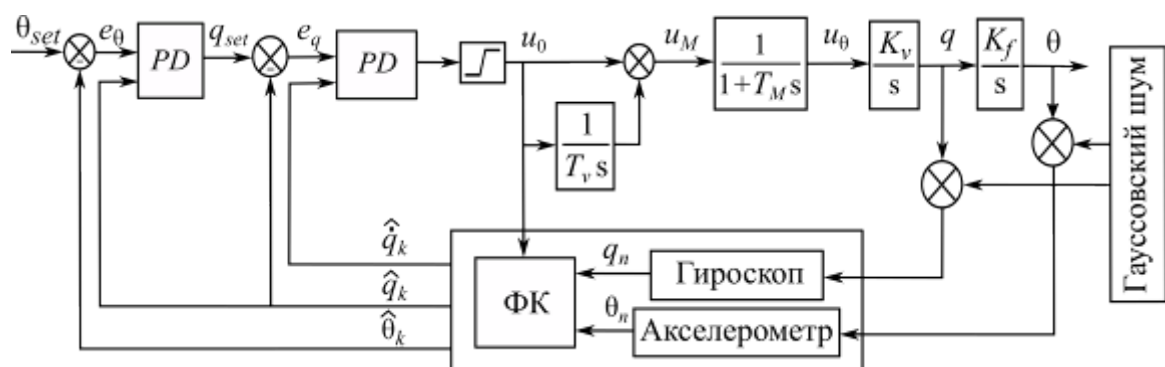


Рис. 1. – Структурная схема контура управления углом крена

В результате получаем систему с двумя вложенными контурами, подходящую для корректного включения ФК

Фильтр Калмана и алгоритм выбора функционала

Согласно процедуре синтеза фильтра Калмана, который представлен в уравнении (18) в работе [11]. Строки 1 и 3 в этой процедуре в стандартной форме ФК можно переписать с учетом шумов измерения v_k и ошибок в оценке переменных состояния модели w_k

$$\begin{aligned}x_k &= Ax_{k-1} + Bu_k + w_k, \\z_k &= Hx_k + v_k,\end{aligned}\tag{5}$$

где $x_k = [\theta_k \quad q_k \quad \dot{q}_k]$ – вектор состояния системы управления креном в момент времени k , A – матрица перехода состояния, x_{k-1} – предыдущее состояние вектора x_k , B – матрица управления, H – матрица наблюдения.

Предполагается, что Q и R независимы друг от друга и имеют нормальное распределение. Как отмечается в работах [7, 8], ковариационные матрицы ошибок процесса Q и измерений R играют ключевую роль в обеспечении оптимальной работы фильтра Калмана при минимизации ошибки оценки. При этом их значения, как правило, подбираются эмпирическим путём, преимущественно на основе интуитивных соображений. Введем отношение определителей ковариационных матриц

$$\gamma = \det(Q) / \det(R).$$

Рассмотрим задачу подбора этого отношения путем минимизации следующих критериев:

– среднеквадратическая ошибка:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [(\theta_k - \hat{\theta}_{k/k})^2 + (q_k - \hat{q}_{k/k})^2],$$

– время переходного процесса $t_{\text{пп}}$.

Целевая функция можно представлена в следующей форме:

$$J(\gamma) = \alpha \cdot MSE(\gamma) + \beta \cdot t_{\text{пп}}(\gamma)\tag{6}$$

где α и β – веса критериев определяются исходя из приоритета между повышением точности оценки и сохранением допустимого быстродействия системы. Минимизация функционала может быть выполнена средствами решения вариационных задач, реализованными в математических пакетах, например MATLAB. Выбор оптимального значения γ обеспечивает

наилучшее сочетание шумоподавления и точности оценки динамики объекта.

Результаты моделирования фильтра Калмана приведены на рис. 2

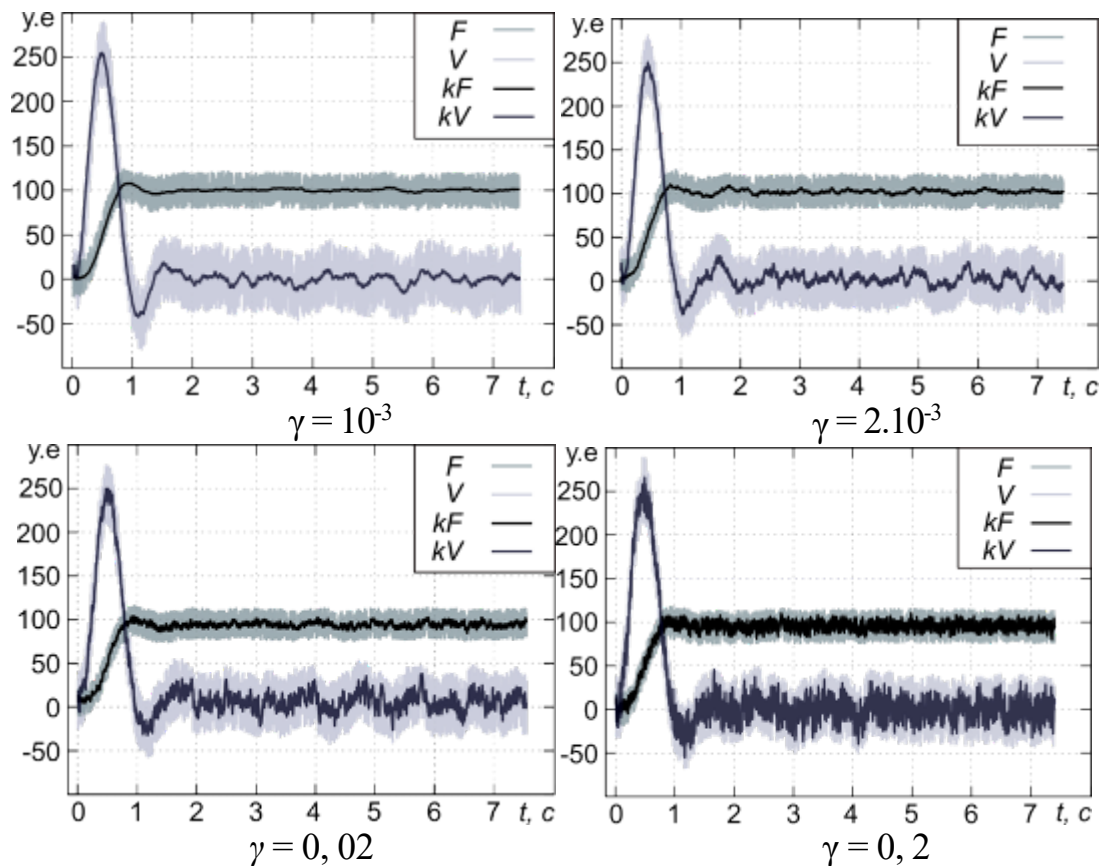


Рис. 2. – Результаты моделирования для разных значений γ

Согласно результатам моделирования, уменьшение параметра $\gamma < 2 \cdot 10^{-3}$ снижает уровень шума, однако вызывает смещение и увеличивает время переходного процесса. Оптимальным является значение $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$, при котором достигается компромисс между быстродействием, допустимым уровнем шума и отсутствием смещения в выходном сигнале. При дальнейшем увеличении γ уровень шума негативно влияет на работу объекта.

Эксперимент

В эксперименте по управлению креном квадрокоптера применялась модель с одной степенью свободы (1-DOF), что позволило наглядно выявить асимметрию конструкции (рис. 3). В состав установки входили датчик IMU-6050 и микроконтроллер Arduino Nano. Подъёмная сила формировалась

вращением двигателя, закреплённого на конце подвижного вала, жестко соединённого с опорным подшипником и основанием конструкции.

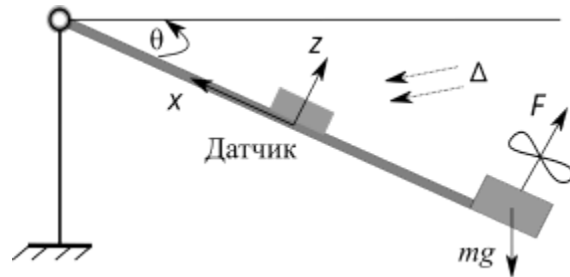


Рис. 3. – Проектированная модель

В процессе проведения экспериментов с системой управления фильтра Калмана были подобраны таким образом, чтобы соответствовать значениям, использованным на этапе моделирования. Полученные экспериментальные результаты представлены на рис. 4.

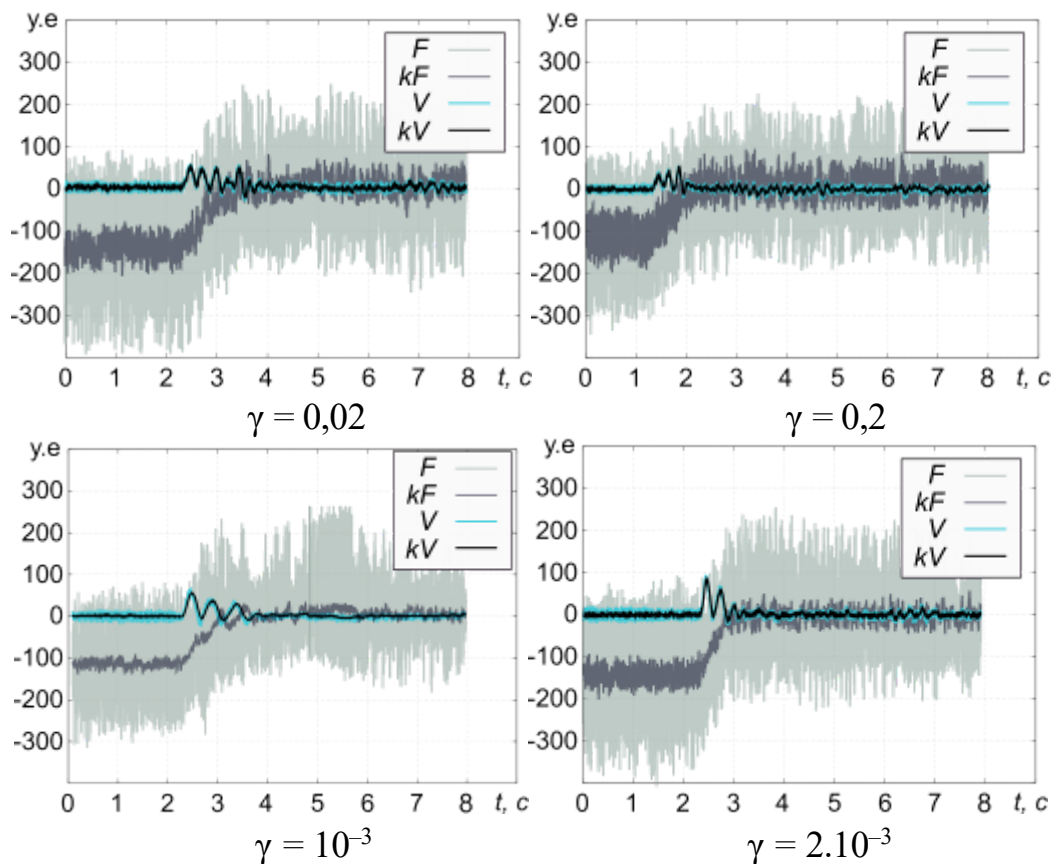


Рис. 4. – Результаты эксперимента ФК при разных коэффициентах соотношения γ

Таким образом, рассматривается компромисс между быстродействием системы и степенью сглаживания сигнала. Для оценки влияния весовых коэффициентов α и β в целевой функции (6) проведены тесты в трёх режимах: равные приоритеты ($\alpha = \beta = 0,5$), приоритет точности ($\alpha = 0,7$; $\beta = 0,3$) и приоритет быстродействия ($\alpha = 0,3$; $\beta = 0,7$). Результаты представлены в табл. 1.

Таблица № 1
Результаты вычисления параметров функционала

γ	MSE	$t_{ПП}$ (с)	α	β	$J(\gamma)$
0,2	50333	1,0	0,3	0,7	15100
			0,7	0,3	35233
			0,5	0,5	25167
0,02	54366	1,3	0,3	0,7	16310
			0,7	0,3	38056
			0,5	0,5	27183
$2 \cdot 10^{-3}$	42378	1,0	0,3	0,7	12714
			0,7	0,3	29664
			0,5	0,5	21189
10^{-3}	49137	1,6	0,3	0,7	14742
			0,7	0,3	34396
			0,5	0,5	24569

По результатам вычисления функционала минимизации видно, что для случая $\gamma = 2 \cdot 10^{-3}$ все три значения критерия J достигают минимума по сравнению с другими случаями.

Заключение

Разработан линейный ФК для стабилизации угла крена квадрокоптера с учётом управляющего воздействия.. Особое внимание уделено формированию ковариационных матриц Q и R , а также исследованию

влияния их соотношения на точность, быстродействие и устойчивость фильтра. Предложена целевая функция для количественной оценки эффективности настройки. Сравнительное моделирование и эксперименты показали, что при оптимальном выборе параметров фильтр Калмана обеспечивает более точные и устойчивые оценки углового положения, особенно в условиях асимметрии и шумов измерений. Практическая применимость методики настройки ковариационных матриц подтверждена, что позволяет достичь баланса между точностью и быстродействием при управлении квадрокоптерами с конструктивными несоответствиями.

Литература

1. Шадрин В. А. и др. Разработка алгоритма управления движением пожарного робота на базе квадрокоптера по заданной траектории в пространстве // Южно-Сибирский научный вестник. 2017. №. 4. С. 229-236.
2. Leith D. J., Leithead W. E. Appropriate realization of gain-scheduled controllers with application to wind turbine regulation // International Journal of Control. 1996. Vol. 65, №. 2. pp. 223-248.
3. Sung S. W., Lee I. B. Limitations and countermeasures of PID controllers // Industrial & engineering chemistry research. 1996. Vol. 35, №. 8. pp. 2596-2610.
4. Lucini M. M., Van Leeuwen P. J., Pulido M. Model error estimation using the expectation maximization algorithm and a particle flow filter // SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2021. Vol. 9, №. 2. pp. 681–707.
5. Kruse T., Griebel T., Graichen K. Adaptive Kalman Filtering: Measurement and Process Noise Covariance Estimation Using Kalman Smoothing // IEEE Access. 2025. Vol. 25. pp.11863-11875.
6. Lee K. Y., Jung S. Time-domain approach using multiple Kalman filters and EM algorithm to speech enhancement with nonstationary noise // IEEE Transactions on speech and audio processing. 2000. Vol. 8, №. 3. pp. 282-291.

7. Alfian R. I., Ma'arif A., Sunardi S. Noise reduction in the accelerometer and gyroscope sensor with the Kalman filter algorithm // Journal of Robotics and Control (JRC). 2021. Vol. 2, No. 3. pp. 180–189.
8. Singh Y., Mehra R. Relative study of measurement noise covariance R and process noise covariance Q of the Kalman filter in estimation // IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering. 2015. Vol. 10, No. 6. pp. 112–116.
9. Фам Чонг Х., Шилин А. А., Нгуен М. Т. Исследование влияния электромагнитных процессов BLDC-мотора на показания гироскопа // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2025. Т. 27. №. 3. С. 55-72.
10. Зосименко К. В., Терехов А. С., Безуглая А. Е. Математическая модель и конфигурация четырехвинтового беспилотного летательного аппарата // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника. 2016. С. 145-149.
11. Pham Trong Hai. et al. Synthesis of Kalman filter in quadcopter roll control loop based on PD-PI controller // Power System Technology. 2025. Vol. 49, No. 1. pp. 99–107.

References

1. Shadrin V. A. et al. Razrabotka algoritma upravleniya dvizheniyem pozharnogo robota na baze kvadrokoptera po zadannoy trayektorii v prostranstve. Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik. 2017, no. 4, pp. 229-236.
 2. Leith D. J., Leithead W. E. Appropriate realization of gain-scheduled controllers with application to wind turbine regulation, International Journal of Control. 1996, vol. 65, no. 2, pp. 223-248.
 3. Sung S. W., Lee I. B. Limitations and countermeasures of PID controllers, Industrial & engineering chemistry research. 1996, vol. 35, no. 8, pp. 2596-2610
 4. Lucini M. M., Van Leeuwen P. J., Pulido M. Model error estimation using the expectation maximization algorithm and a particle flow filter. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2021, vol. 9, no. 2, pp. 681–707.
-

5. Kruse T., Griebel T., Graichen K. Adaptive Kalman Filtering: Measurement and Process Noise Covariance Estimation Using Kalman Smoothing. IEEE Access. 2025, vol. 25, pp.11863-11875.
6. Lee K. Y., Jung S. Time-domain approach using multiple Kalman filters and EM algorithm to speech enhancement with nonstationary noise. IEEE Transactions on speech and audio processing. 2000, vol. 8, no. 3, pp. 282-291.
7. Alfian R. I., Ma'arif A., Sunardi S. Noise reduction in the accelerometer and gyroscope sensor with the Kalman filter algorithm. Journal of Robotics and Control (JRC). 2021, vol. 2, no. 3, pp. 180–189.
8. Singh Y., Mehra R. Relative study of measurement noise covariance R and process noise covariance Q of the Kalman filter in estimation. IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering. 2015, vol. 10, no. 6, pp. 112–116.
9. Pham Trong H., Shilin A. A., Nguyen M. T. Issledovaniye vliyaniya elektromagnitnykh protsessov BLDC-motora na pokazaniya giroskopa. Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN. 2025, vol. 27, no. 3, pp. 55-72.
10. Zosimenko K. V., Terekhov A. S., Bezuglaya A. E. Matematicheskaya model' i konfiguratsiya chetyrekhvintovogo bespilotnogo letatel'nogo apparata. Intellektual'nyye sistemy, upravleniye i mekhatronika. 2016, pp. 145-149
11. Pham Trong Hai. et al. Synthesis of Kalman filter in quadcopter roll control loop based on PD-PI controller. Power System Technology. 2025, vol. 49, no. 1, pp. 99–107.

Дата поступления: 30.07.2025

Дата публикации: 25.09.2025