

## Определение длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней при нелинейной ползучести

Н.И. Никора<sup>1</sup>, А.С. Чепурненко<sup>1</sup>, С.В. Литвинов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный строительный университет

**Аннотация:** Рассматривается методика расчета на устойчивость с учетом нелинейной ползучести сжатых полимерных стержней. В качестве закона связи между напряжениями и деформациями используется нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Из анализа выведенных разрешающих уравнений при времени стремящемся к бесконечности, получено выражение для длительной критической силы в случае постоянной жесткости стержня.

**Ключевые слова:** нелинейная ползучесть, стержень, устойчивость, уравнение Максвелла-Гуревича, метод конечных разностей, длительная критическая сила, релаксационная вязкость, вязкоупругость, модуль высокоэластичности.

Рассматривается шарнирно опертый по концам стержень, сжимаемый силой  $F$ , и имеющий начальную погибь в плоскости наименьшей жесткости  $v_0 = f(x)$  (рис. 1а).

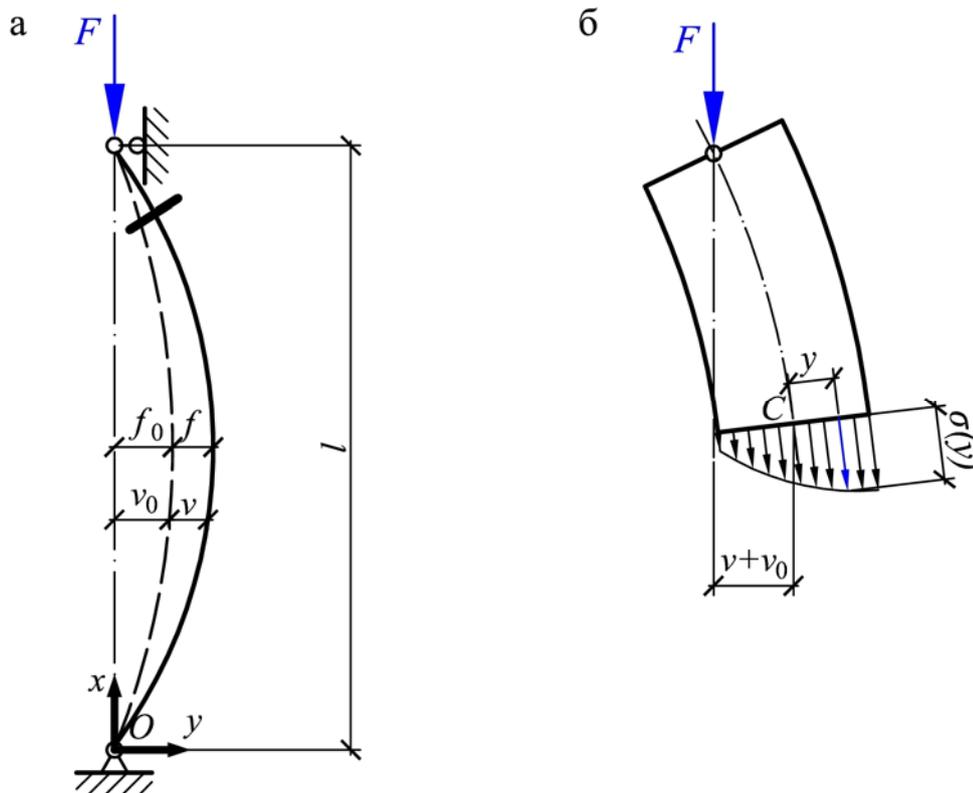


Рис. 1. — К расчету на устойчивость сжатого стержня

Используется модель вязкоупругого материала, в соответствии с которой полная деформация представляется в виде суммы упругой деформации и деформации ползучести  $\varepsilon^*$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^*. \quad (1)$$

Причем модуль упругости  $E$  может быть переменным по длине стержня, т.е.  $E = f(x)$ , а  $\varepsilon^*$  – функция от  $x$  и  $y$ .

В соответствии с гипотезой плоских сечений полная деформация стержня  $\varepsilon$  представляет собой сумму осевой деформации  $\varepsilon_0$  и деформации, вызванной изменением кривизны:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* \right). \quad (3)$$

Рассмотрим равновесие отсеченной части стержня (рис. 1б). Положительными будем считать растягивающие напряжения. Составим сумму моментов относительно центра тяжести поперечного сечения:

$$\sum M_C = 0: F(v + v_0) - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (4)$$

Составив сумму проекций всех сил на ось стержня в недеформированном состоянии, получим:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = - \int_A \sigma dA. \quad (5)$$

Подставим (3) в (4):

$$F(v + v_0) = E \left( \varepsilon_0 \int_A y dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA - \int_A \varepsilon^* y dA \right). \quad (6)$$

Величина  $\int_A y dA$  представляет собой статический момент сечения, и она равна нулю; величина  $I_z = \int_A y^2 dA$  — осевой момент инерции. Индекс «z» далее будет опущен.

Окончательно разрешающее уравнение для шарнирно опертого стержня примет вид:

$$E(x)I(x)\frac{d^2v}{dx^2} + Fv = -Fv_0 - E \int_A \varepsilon^* y dA. \quad (7)$$

Выражение для осевой деформации получим, подставив (3) в (5):

$$F = - \int_A E(\varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2} - \varepsilon^*) dA = -EA\varepsilon_0 + \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y dA + E \int_A \varepsilon^* dA;$$
$$\varepsilon_0 = -\frac{F}{EA} + \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA. \quad (8)$$

Уравнение (7) решается методом Бубнова–Галеркина [1], либо методом конечных разностей [3, 5, 6, 9, 10]. Для определения деформаций  $\varepsilon^*$  в каждый момент времени можно использовать линейную аппроксимацию по времени [2, 4, 5].

Для прямоугольного поперечного сечения интегралы по площади, входящие в (7) и (8) сводятся к определенным интегралам:

$$\int_A \varepsilon^* y dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy, \quad \int_A \varepsilon^* dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* dy. \quad (9)$$

В работах [3,10] для расчета стержня круглого сечения вводится сетка по  $r$  и  $\varphi$ . Однако двойной интеграл по площади сводится к определенному интегралу и для круглого сечения, т. к. деформация ползучести  $\varepsilon^*$  в поперечном сечении зависит только от  $y$ .

$$\int_A \varepsilon^* y dA = \int_{-R}^R \varepsilon^* y b(y) dy = 2 \int_{-R}^R \varepsilon^* y \sqrt{R^2 - y^2} dy;$$

$$\int_A \varepsilon^* dA = 2 \int_{-R}^R \varepsilon^* \sqrt{R^2 - y^2} dy. \quad (10)$$

Интегралы в (9) и в (10) вычисляются численно при помощи формул Симпсона или трапеций.

Деформация ползучести полимера представляется спектрами времен релаксации:  $\varepsilon^* = \sum \varepsilon_s^*$ . Уравнение Максвелла–Гуревича для составляющих спектра записывается в виде [8]:

$$\frac{\partial \varepsilon_s^*}{\partial t} = \frac{f_s^*}{\eta_s^*}, \quad (11)$$

где  $f_s^*$  — функция напряжений,  $\eta_s^*$  — релаксационная вязкость.

$$f_s^* = \sigma - E_{\infty s} \varepsilon_s^*; \quad \frac{1}{\eta_s^*} = \frac{1}{\eta_{0s}^*} \exp\left|\frac{f_s^*}{m_s^*}\right|, \quad (12)$$

где  $E_{\infty s}$  — модуль высокоэластичности,  $\eta_{0s}^*$  — начальная релаксационная вязкость,  $m_s^*$  — модуль скорости.

В ряде работ [2, 7, 9] при анализе устойчивости в условиях линейной ползучести вводится понятие длительной критической силы  $F_{\text{дл}}$ . При  $F < F_{\text{дл}}$  прогиб стержня затухает, при  $F = F_{\text{дл}}$  прогиб растет с постоянной скоростью, а при  $F > F_{\text{дл}}$  скорость роста стрелы прогиба монотонно возрастает.

Чтобы найти длительную критическую силу для материала, подчиняющегося закону Максвелла–Гуревича, проанализируем уравнение (11) при  $t \rightarrow \infty$ . Допустим, что при времени, стремящемся к бесконечности, прогиб стремится к конечному значению. Тогда в конце процесса ползучести равны нулю скорости роста каждой составляющей  $\varepsilon_s^*$ :

$$\frac{\partial \varepsilon_s^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow f_s^* = 0, \eta_s^* \neq 0. \quad (13)$$

Приравнивая к нулю функции напряжений  $f_s^*$ , получим предельные величины каждой составляющей спектра:

$$f_s^* = 0 \Rightarrow \sigma - E_{\infty s} \varepsilon_s^* = 0 \Rightarrow \varepsilon_{s,пред}^* = \frac{\sigma}{E_{\infty s}}. \quad (14)$$

Подставим (14) в (1):

$$\varepsilon = \sigma \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{E_{\infty 1}} + \frac{1}{E_{\infty 2}} + \dots \right) = \sigma \left( \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}} \right). \quad (15)$$

Введем величину длительного модуля  $H$ , определяемую по формуле:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}}. \quad (16)$$

Уравнение (7) при  $t \rightarrow \infty$  переписывается в виде:

$$H(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -Fv_0. \quad (17)$$

Полученное уравнение отличается от уравнения продольного изгиба упругого стержня, имеющего начальную погибь, только тем, что в нем вместо мгновенного модуля упругости  $E(x)$  стоит величина  $H(x)$ . Таким образом, задача определения длительной критической нагрузки сводится к упругой путем замены мгновенного модуля на длительный. Для стержня постоянной жесткости  $F_{\text{дл}} = \frac{\pi^2 HI}{l^2}$ . Отметим, что условие  $F < F_{\text{дл}}$  является необходимым, но не достаточным для того, чтобы прогиб затухал. Иными словами, можно утверждать, что при  $F \geq F_{\text{дл}}$  стержень гарантированно потеряет устойчивость, но нельзя утверждать обратного.

Была решена модельная задача для стержня постоянной жесткости из ПММА при следующих исходных данных: длина стержня  $l = 157$  мм, сечение круглое,  $d = 10$  мм,  $E = 2940$  МПа. Учитывалась только «старшая» составляющая спектра времен релаксации  $\varepsilon_1^*$ . Реологические

константы:  $E_{\infty I} = 2500$  МПа,  $\eta_{01}^* = 10^{10}$  МПа·с,  $m_1^* = 4.5$  МПа. Длительная критическая сила для стержня составила  $F_{\text{дл}} = 266$  Н.

На рис. 2 представлены графики роста стрелы прогиба при  $F = 245$  Н (кривая 1),  $F = 266$  Н (кривая 2) и  $F = 280$  Н (кривая 3).

Из рис. 2 видно, что, в отличие от линейной ползучести, как при  $F < F_{\text{дл}}$ , так и при  $F \geq F_{\text{дл}}$  имеется участок с затухающей скоростью роста стрелы прогиба  $\frac{\partial f}{\partial t}$ . Далее при  $F = F_{\text{дл}}$  прогиб растет с постоянной скоростью, а при  $F > F_{\text{дл}}$  величина  $\frac{\partial f}{\partial t}$  возрастает.

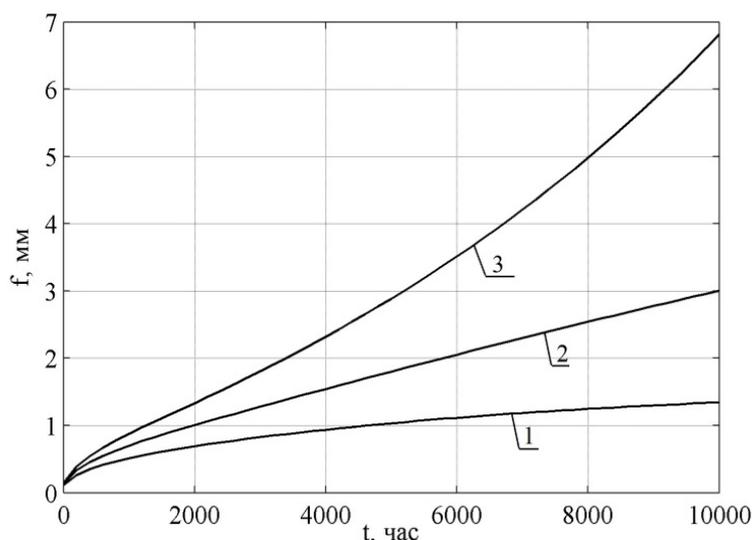


Рис. 2. – Графики роста стрелы прогиба

### Литература

1. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона, 2013, №2 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714](http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714).



2. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Вестник МГСУ. №1. 2013, с. 101–108.

3. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И. и др. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ–10 при различных вариантах закрепления // Инженерный Вестник Дона, 2011, №2 URL: ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415.

4. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep // Advanced Materials Research Vols. 1004–1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.

5. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.

6. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б. Устойчивость полимерных стержней при различных вариантах закрепления // Вестник МГСУ. №2. т.2. 2011. С.153–157.

7. Белоус П.А. Устойчивость полимерного стержня при ползучести с учетом начальной кривизны//Труды Одесского политехнического института, 2001, №2. С. 43-46.

8. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1979. 320 с.

9. Клименко Е.С., Аминова Е.Х., Литвинов С.В., Языев С.Б., Кулинич И.И. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учетом физической нелинейности материала: монография. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. 77с.

10. Кулинич И.И., Клименко Е.С., Языев С.Б., Литвинов С.В. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств

---



// «Строительство-2011»: материалы Международной научно-практической конференции. Ростов-н/Д: РГСУ, 2011. С. 159–161.

### References

1. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.
2. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Yazyev B.M. Vestnik MGSU. №1. 2013, pp. 101–108.
3. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2011, №2 URL: ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415.
4. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Advanced Materials Research Vols. 1004–1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.
5. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.
6. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I., Yazyeva S.B. Vestnik MGSU. №2. t.2. 2011, pp. 153–157.
7. Belous P.A. Trudy Odesskogo politekhnicheskogo instituta, 2001, №2, pp. 43-46.
8. Gol'dman A.Ya. Prochnost' konstruktsionnykh plastmass [Strength of structural plastics]. L.: Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1979. 320 p.
9. Klimenko E.S., Amineva E.Kh., Litvinov S.V., Yazyev S.B., Kulinich I.I. Ustoychivost' szhatykh neodnorodnykh sterzhney s uchetom fizicheskoy nelineynosti materiala: monografiya [Stability of compressed inhomogeneous rods taking into account physical nonlinearity of the material: a monograph]. Rostov n/D: Rost. gos. stroit. un-t, 2012. 77 p.



10. Kulinich I.I., Klimenko E.S., Yazyev S.B., Litvinov S.V.. «Stroitel'stvo-2011»: materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Rostov-n/D: RGSU, 2011, pp. 159–161.