

## Расчет числовых значений функционала – экстраполятора фрактального L-марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью

А.Н.Титов<sup>1</sup>, Л.Ю. Фадеева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технологический университет

<sup>2</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева – КАИ

**Аннотация:** Получены числовые значения функционала – экстраполятора фрактального L – марковского процесса с квазирациональным спектром. При расчете прогнозных комплексных значений на время упреждения  $\tau$  использованы методы корреляционно – регрессионного анализа. Проведен анализ действительных и мнимых частей оптимального экстраполятора при всех корректных значениях срока упреждения  $\tau$ . Рассчитаны коэффициенты линейной корреляции Пирсона и ранговой корреляции Кендалла, которые указывают на высокую линейную корреляцию между действительными и мнимыми частями экстраполятора и на их заметную ранговую корреляцию. Доказана представимость оптимального экстраполятора на срок упреждения  $\tau$  в виде линейной комбинации значений исследуемого фрактального L – марковского процесса в пяти точках L – границы. Рассчитанные значения бета – коэффициента и показателя Хёрста свидетельствует о высокой надежности построенного в работе прогноза.

**Ключевые слова:** экстраполирование, L – марковский процесс, фрактальность, трендоустойчивость, спектральная характеристика, корреляционно – регрессионный анализ, оптимальный экстраполятор, риск.

**Введение.** Явные формулы для оптимального экстраполятора, интерполятора и оператора фильтрации были получены для случайных процессов с рациональными спектральными плотностями знаменитым американским ученым Н. Винером и с тех пор широко применяются во многих областях науки и техники. Явные экстраполяционные формулы для процессов с нерациональными спектральными плотностями получены впервые известным математиком А. Ягломом и доложены им в 1966 году на Берклиевском симпозиуме по теории вероятностей в США [1]. Основываясь на результатах, полученных А. Ягломом, авторами были получены экстраполяционные формулы для видеосигналов, в числителе спектральной плотности которых стоит квазиполином [2], а также формулы для операторов

фильтрации с прогнозом для  $L$  – марковских процессов с квазирациональной спектральной плотностью [3] с учетом результатов работы [4].

**Целью данной работы** является расчет числовых значений функционала – экстраполятора фрактального  $L$ -марковского процесса с квазирациональной спектральной плотностью и его программная реализация.

**Методы решения задачи.** В представленной работе поставлена задача о нахождении наилучшего линейного приближения  $\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau)$  к случайной величине  $\xi(t + \tau)$  с помощью величин  $\xi(s)$ ,  $s \leq t$ . Экстраполяция осуществляется по всему прошлому процесса  $\xi(s)$ , задаваемому спектральным представлением  $\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau) = L \{ \xi(s), s \leq t \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi_{\tau}(\omega) dZ(\omega)$ , где функция комплексного переменного  $\Phi_{\tau}(\omega)$  является спектральной характеристикой экстраполирования, а  $Z(\omega)$  – случайная функция с некоррелированными приращениями, участвующая в спектральном представлении случайного процесса  $\xi(s)$ :  $\xi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\omega} dZ(\omega)$ .

Комплексные значения экстраполятора  $\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau)$  вычисляются по всему прошлому  $L$  – марковского фрактального процесса с квазирациональной спектральной плотностью вида:

$$S(\omega) = 1/|G(\omega)|^2 = 1/|A\omega + B + 2ae^{-i\omega} + (C\omega + D)e^{-2i\omega}|^2, \quad (1)$$

где  $A = d + i(b - c)$ ,  $B = a - c - id$ ,  $C = d - (c + b)i$ ,  $D = a + c + di$ , а действительные числа  $a, b, c, d$  связаны соотношениями :

$$b > a > 0; c > 0, d > 0. \quad (2)$$

Соотношения (2) обеспечивают принадлежность всех корней квазиполинома  $G(\omega)$  верхней полуплоскости, что доказано авторами в работе [5].

В работе авторов [2] доказана  $L$  – марковость и фрактальность процесса с плотностью (1) и с помощью спектрального анализа и метода

А. М. Яглома [6, 7] выведены следующие явные формулы для оптимального линейного функционала – экстраполятора  $\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \Phi_{\tau}(\omega) dZ(\omega)$ , построенные по всему прошлому случайного процесса  $\xi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\omega} dZ(\omega)$  на двух интервалах: при  $0 < \tau < 1$  :

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau) = \alpha \xi(t) + \frac{\alpha C}{A} \xi(t - 2) - \frac{C}{A} \xi(t + \tau - 2) + \sum_{j=1}^4 W_j \cdot \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \xi(t_j - s) ds, \quad (3)$$

где  $t_1 = t - 1$ ,  $t_2 = t - 2$ ,  $t_3 = t + \tau - 1$ ,  $t_4 = t + \tau - 2$ ,  $W_1 = -\alpha W_3$ ,  $W_2 = -\alpha W_4$ ,  $W_3 = 2ai/A$ ,  $W_4 = i(BC - AD)/A^2$ ,  $\alpha$  задается формулой  $\alpha = e^{-i\tau B/A}$ ,  $\gamma = Bi/A$ .

при  $1 \leq \tau < 2$  :

$$\tilde{\xi}(t; \tau) = \tilde{\xi}(t + \tau) = \frac{E}{A} \xi(t) - \frac{C}{A} \xi(t + \tau - 2) + \sum_{j=1}^5 F_j \cdot \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} \xi(z_j - s) ds + \sum_{j=2}^5 M_j \cdot \int_0^{\infty} s e^{-\gamma s} \xi(z_j - s) ds \cdot \quad (4)$$

где  $z_1 = t$ ,  $z_2 = t - 1$ ,  $z_3 = t - 2$ ,  $z_4 = t + \tau - 2$ ,  $z_5 = t + \tau - 3$ ,  $M_2 = -2a(H + E)/A^2$ ,  $M_3 = -\varphi(E + H)$ ,  $M_4 = -4a^2/A^2$ ,  $M_5 = -2a\varphi$ ,  $F_1 = i(AN - EB)/A^2$ ,  $F_2 = 0$ ,  $F_3 = iC(E + H)/A^2$ ,  $F_4 = -A\varphi i$ ,  $F_5 = 2aCi/A^2$ ,  $\varphi = (D + C\gamma i)/A^2$ , а  $E$  и  $H$  задаются формулами:  $E = \alpha i(\tau - 1) + A \cdot \lambda$ ;  $H = B\lambda + \alpha \{1 + [Bi(\tau - 1)]/A\}$ .

Из формул (3) и (4) следует, что нахождению численных значений экстраполятора препятствует неизвестность аналитического выражения для случайного процесса  $\xi(u)$ , в силу чего интегралы в (3) и (4) невозможно вычислить аналитическими методами. Поэтому аппроксимируем случайный процесс  $\xi(u)$  тригонометрическим трендом с  $N$  гармониками вида:

$$\xi_{\text{теор}}(u) = \tilde{\xi}(u) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos ku + b_k \sin ku), \quad (5)$$

где коэффициенты  $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, N$  задаются формулами:

$$a_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j)/r; \quad a_k = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j) \cos(ku_j); \quad b_k = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \xi(u_j) \sin(ku_j). \quad (6)$$

Выбор тригонометрического тренда в качестве аппроксимирующей функции объясняется, во-первых, тригонометрическим (синусоидальным)

графиком случайного процесса и, во-вторых, тем, что радиосигналы, как правило, аппроксимируются тригонометрическими функциями.

Подставим в формулу (3) вместо  $\xi(t_j - s)$  правую часть формулы (5), предварительно сделав замену  $u = t_j - s$ . В результате получим окончательную формулу для оптимального экстраполятора при  $0 < \tau < 1$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; \tau) = & \alpha \xi(t) + \frac{\alpha C}{A} \xi(t-2) - \frac{C}{A} \xi(t+\tau-2) + \\ & + \sum_{j=1}^4 W_j \left[ \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{k=1}^N a_k \frac{k \sin kt_j + \gamma \cos kt_j}{k^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^N b_k \frac{\gamma \sin kt_j - k \cos kt_j}{k^2 + \gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, подставив в (4) вместо  $\xi(z_j - s)$  формулу (5) и сделав предварительно замену  $y = z_j - s$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t; \tau) = & \frac{E}{A} \xi(t) - \frac{C}{A} \xi(t+\tau-2) + \sum_{j=1}^5 F_j \cdot \left[ \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{k=1}^N a_k \frac{k \sin kz_j + \gamma \cos kz_j}{k^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^N b_k \frac{\gamma \sin kz_j - k \cos kz_j}{k^2 + \gamma^2} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^5 M_j \left\{ z_j \left[ \frac{a_0}{\gamma} + \sum_{k=1}^N a_k \frac{k \sin kz_j + \gamma \cos kz_j}{k^2 + \gamma^2} + \sum_{k=1}^N b_k \frac{\gamma \sin kz_j - k \cos kz_j}{k^2 + \gamma^2} \right] - \right. \\ & - \frac{a_0}{\gamma^2} (\gamma z_j - 1) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{(k^2 + \gamma^2)^2} \left[ (k^2 + \gamma^2) \cdot z_j (k \sin kz_j + \gamma \cos kz_j) - 2k\gamma \sin kz_j + (k^2 - \gamma^2) \cos kz_j \right] - \\ & \left. - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{(k^2 + \gamma^2)^2} \left[ (k^2 + \gamma^2) \cdot z_j (\gamma \sin kz_j - k \cos kz_j) + 2k\gamma \cos kz_j + (k^2 - \gamma^2) \sin kz_j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для расчета числового значения оператора экстраполирования по формулам (7), (8) зададим в формуле (1) спектральной плотности процесса параметры  $a, b, c, d$  равными следующим значениям  $a = 0,7; b = 0,8; c = 0,1; d = 7$ . Тогда квазиполином  $G(\omega)$  в формуле (1) примет вид:

$$\tilde{G}(\omega) = (7 + 0,1i)\omega + 0,6 - 7i + 1,4e^{-i\omega} + [(7 - 0,9i)\omega + 0,8 + 7i]e^{-2i\omega}. \quad (9)$$

Поскольку  $0,8 = b > a = 0,7; c = 0,1 > 0$  и  $d = 7 > 0$ , то условия (2) принадлежности  $\tilde{G}(\omega)$  к верхней полуплоскости будут соблюдены и все требования к спектральной характеристике  $\Phi_r(\omega)$  случайного процесса со спектральной плотностью  $\tilde{S}(\omega) = 1/|\tilde{G}(\omega)|^2$  выполнены.

**Результаты работы.** Сгенерируем на виртуальном приборе, выполненном на языке программирования LabVIEW, 5000 значений сигнала со спектральной плотностью  $\tilde{S}(\omega)$ , из которых отберем 4712 значений, отбросив тривиальные или не вписывающиеся в общую картину, это, как правило, первые и последние несколько значений. Сгенерированный сигнал изображен на рис. 1.

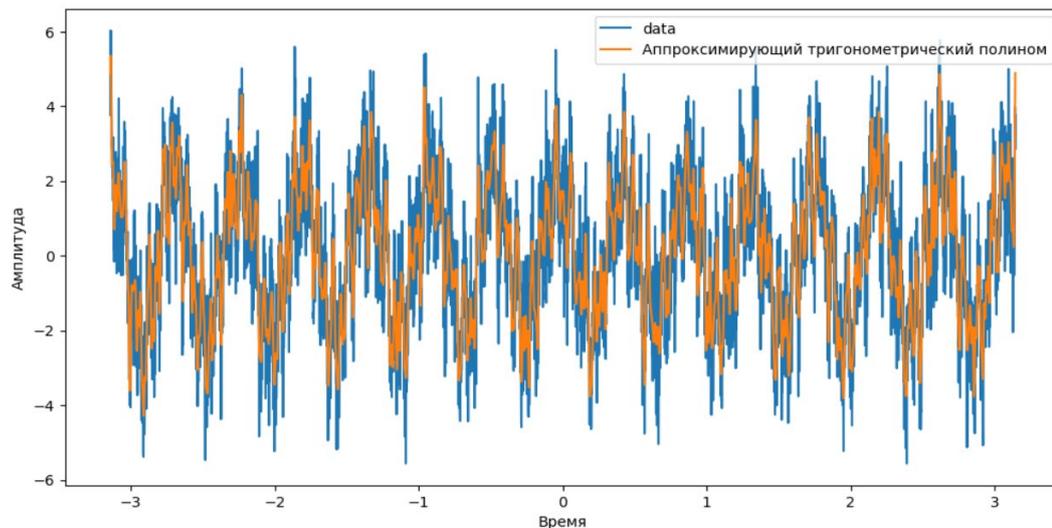


Рис. 1. – Фрактальный L – марковский сигнал и аппроксимирующая его тригонометрическая регрессия.

График исследуемого сигнала визуально совпадает с графиком фрактального процесса. Чтобы убедиться во фрактальности процесса, рассчитаем показатель Хёрста исследуемого процесса [8]. Он оказался равным 0,811. Для достоверности рассчитаем этот показатель ещё и методом индекса фрактальности, предложенным Дубовиковым и Старченко [9]. Расчет по этому методу дал следующее значение индекса фрактальности  $\tilde{\mu} = 0,192$ . Соответствующий этому значению показатель Хёрста  $H = 1 - \tilde{\mu}$  равен  $H = 0,808$ . Как видим, оба метода дали практически один и тот же результат  $H = 0,81$ .

Поскольку  $H \neq 0,5$ , то процесс является фрактальным и, более того, персистентным в силу  $H > 0,5$ . Явная трендоустойчивость (персистентность)

процесса в силу большого значения показателя Хёрста (или, соответственно, малого значения фрактальной размерности  $D = 2 - H = 1,19$ ), как известно [8], позволяет сделать предположение о надежности и адекватности прогноза, который будет построен далее.

Аппроксимируем исследуемый процесс тригонометрическим полиномом (5). Важнейшим моментом аппроксимации является выбор оптимального числа  $N_{\text{опт}}$  гармоник в формуле (5). Зададим необходимую точность аппроксимации  $\varepsilon = 0,0005$  и найдем минимальное значение  $N$ , при котором  $|COA(N+1) - COA(N)| < \varepsilon$ , где  $COA(N)$  – стандартизованная ошибка аппроксимации процесса моделью (5) с  $N$  гармониками, вычисляемая по формуле:

$$COA = \sqrt{\sum_{j=0}^{r-1} [\rho_{\text{факт}}(u_j) - \hat{\rho}_{\text{теор}}(u_j)]^2 / r}. \quad (10)$$

Чтобы добиться требуемой точности  $\varepsilon = 0,0005$ , синтезируем 460 тригонометрических полиномов с  $N = 1, 2 \dots 460$  гармониками и рассчитаем их стандартизованные ошибки аппроксимации. Результаты расчетов иллюстрируются рис. 2 и оформлены в виде таблицы № 1.

Таблица № 1

Значения COA вблизи  $N_{\text{опт}}$ .

$N$	427	428	429	430	431	432	433
$COA$	0,90024	0,89949	0,89947	0,89896	0,89871	0,89835	0,89810

Как видим из рис.2, резкое снижение значения COA (её скачки) произошли при  $N = 14$ ,  $N=69$  и  $N = 118$  гармоник. Требуемая точность  $\varepsilon = 0,0005$  достигается, как это видно из таблицы № 1, при  $COA(N = 431) - COA(N = 430) = 0,00025 < \varepsilon$ , потому в качестве оптимального числа гармоник было принято число  $N_{\text{опт}} = N = 430$ .

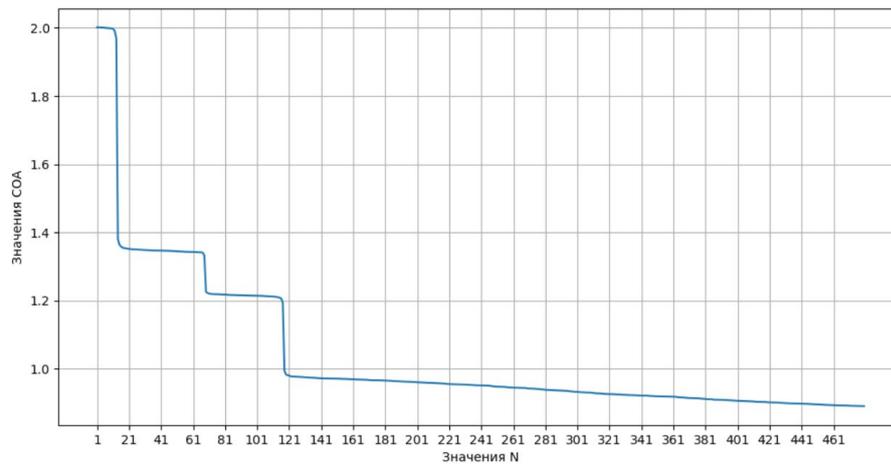


Рис. 2. – Зависимость СОА от количества гармоник  $N$ .

Рассчитаем при этом  $N = 430$  коэффициенты  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$ , по формулам (6) и построим по ним аппроксимирующую заданный сигнал тригонометрическую регрессию, представленную на рис.1.

В таблице № 2 приведены для примера некоторые из 430 рассчитанных коэффициентов.

Таблица № 2

Коэффициенты тригонометрической регрессии

$k$	0	1	2...	100...	200...	300...	400...	430
$a_k$	0,04345	0,00976	0,04050	-0,018	0,01340	-0,002	0,00986	0,04493
$b_k$		-0,0354	-0,0153	-0,008	0,03734	-0,002	0,02389	0,00286

Составленная авторами на языке программирования Python программа позволяет пользователю получить численное значение функционала – экстраполятора после задания им нужного времени упреждения  $\tau$ , то есть получить надежный и достоверный прогноз исследуемого процесса. Например, задав  $\tau = 0,6$ , пользователь получит  $\tilde{\xi}(\pi + \tau) = \tilde{\xi}(\pi + 0,6) = 1,796 + 0,178i$  или при  $\tau = 1$   $\tilde{\xi}(\pi + 1) = -1,793 + 0,792i$ .

Значения ключевых параметров экстраполятора, вычисленных по формулам (3)–(4) при сроке упреждения  $\tau = 1$  равны:  $E = 2,575 + 0,294i$ ;

$$\begin{aligned} H &= -1,143 - 2,575i; & M_2 &= -0,027 + 0,071i; & M_3 &= -0,746 - 0,177i; \\ M_4 &= -0,039 + 0,008i; & M_5 &= -0,128 - 0,377i; & F_1 &= -0,020 - 0,198i; \\ F_3 &= 0,374 + 0,0089i; & F_4 &= 1,952 - 0,452i; & F_5 &= 0,064 + 0,189i. \end{aligned}$$

В таблице № 3 приведены значения действительных и мнимых частей оптимального экстраполятора  $\tilde{\xi}(\pi + \tau)$ , соответствующие сроку упреждения  $\tau \in (0; 2)$ , изменяющемуся с шагом  $h = 0,1$ . Кроме этих значений в таблицу 5 помещены максимальные и минимальные значения на  $(0, 2)$  действительных и мнимых частей экстраполятора, рассчитанные с шагом для срока упреждения, равном  $h = 0,001$  с целью расчета с высокой точностью размаха  $R$  – широко распространенного инструмента статистического исследования.

Таблица № 3

Числовые значения экстраполятора при заданных значениях срока упреждения  $\tau$

$\tau$	$\text{Re} \tilde{\xi}$	$\text{Im} \tilde{\xi}$	$\tau$	$\text{Re} \tilde{\xi}$	$\text{Im} \tilde{\xi}$	$\tau$	$\text{Re} \tilde{\xi}$	$\text{Im} \tilde{\xi}$
0,100	1,845	0,562	0,800	4,956	-0,595	1,300	3,387	-0,680
0,200	0,057	0,864	0,804	5,469	-0,716	1,400	1,032	-0,244
0,202	0,124	0,867	0,900	1,793	0,077	1,500	0,850	-0,276
0,300	3,143	0,128	0,995	-1,582	0,781	1,600	2,384	-0,648
0,332	6,366	-0,638	1,00	-1,793	0,792	1,700	2,978	-0,801
0,400	4,804	-0,322	1,005	-1,960	0,823	1,718	3,719	-0,984
0,500	3,658	-0,165	1,100	-1,293	0,559	1,800	1,152	-0,438
0,600	1,796	0,178	1,200	1,356	-0,126	1,900	-1,784	0,186
0,700	4,016	-0,362	1,236	4,84	-0,53	1,999	-3,516	0,589

По таблице № 3 был построен график зависимости действительных и мнимых частей экстраполятора  $\tilde{\xi}(\pi + \tau)$  на всем интервале срока упреждения  $\tau$  (Рис.3).

Размахом  $R\{\text{Re}\tilde{\xi}\}$  действительных частей экстраполятора  $\tilde{\xi}$  будем называть разность между максимальным и минимальным значениями среди всех действительных частей экстраполятора, рассматриваемых на исследуемом интервале срока упреждения:  $R\{\text{Re}\tilde{\xi}\} = \text{Re}_{\max}\tilde{\xi} - \text{Re}_{\min}\tilde{\xi}$ ; аналогично записывается формула размаха и для мнимых частей экстраполятора:  $R\{\text{Im}\tilde{\xi}\} = \text{Im}_{\max}\tilde{\xi} - \text{Im}_{\min}\tilde{\xi}$ .

Рассчитаем размах действительных и мнимых частей экстраполятора  $\tilde{\xi}(\pi + \tau)$  на всем интервале изменения срока упреждения  $(0; 2)$ :

$$\text{Re}_{\max}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2)) = \text{Re}\tilde{\xi}(\tau = 0,332) = 6,366 ;$$

$$\text{Re}_{\min}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2)) = \text{Re}\tilde{\xi}(\tau = 1,999) = -3,516 ; R\{\text{Re}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2))\} = 9,882 ;$$

$$\text{Im}_{\max}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2)) = \text{Im}\tilde{\xi}(\tau = 0,202) = 0,867 ;$$

$$\text{Im}_{\min}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2)) = \text{Im}\tilde{\xi}(\tau = 1,718) = -0,984 ; R\{\text{Im}\tilde{\xi}(\tau \in (0; 2))\} = 1,851 .$$

Таким образом, на всем интервале  $(0; 2)$  изменения  $\tau$  действительные части экстраполятора в среднем в 5,3 раза больше его мнимых частей. Это означает, что фазовый угол сигнала равен  $10,7^{\circ}$ . С точки зрения радиофизики фаза сигнала порядка  $10,7^{\circ}$  показывает, что потери при распространении сигнала малы; такой сигнал в основном переносит энергию, а не рассеивает её, а среда обладает умеренными потерями. Соотношение  $\text{Re}/\text{Im} \approx 5-6$  характеризует границу между слабо поглощающей и умеренно поглощающей средой. Примерами таких сред являются диэлектрики во влажной среде в радиодиапазоне 1 – 10 ГГц, морская вода, ионизированный воздух, слабопроводящие композиты, композиционные поглотители в радиодиапазоне (углеродные наполнители, ферриты); полупроводники, используемые для СВЧ диапазона, например, GaAS (арсенид галлия) и т.д.

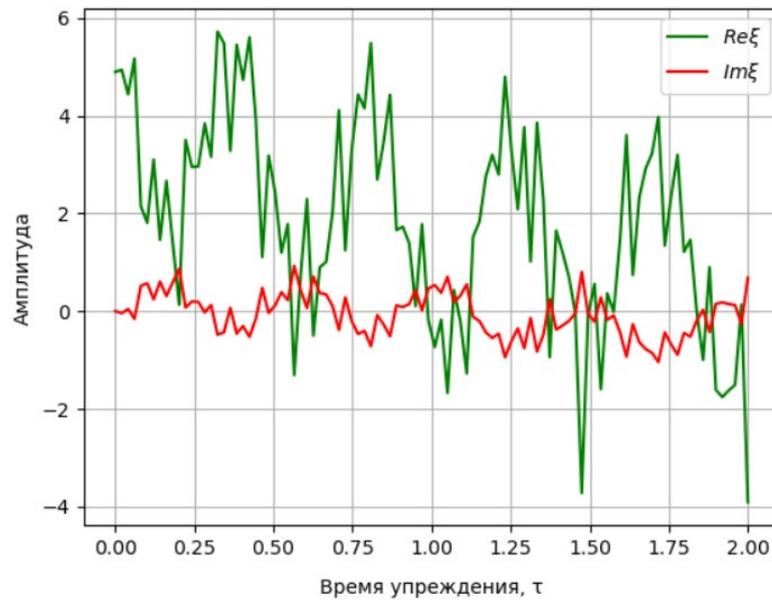


Рис. 3. – Зависимость действительных и мнимых частей экстраполятора  $\tilde{\xi}(\pi + \tau)$  от времени упреждения  $\tau$ .

Построен 3D-график зависимости экстраполятора  $\tilde{\xi}(\pi + \tau)$  от времени упреждения  $\tau$  на интервале (0; 2) по 100 точкам. На оси OX отложено время упреждения  $\tau$ , на оси OY – мнимые части экстраполятора, на оси OZ – его действительные части.

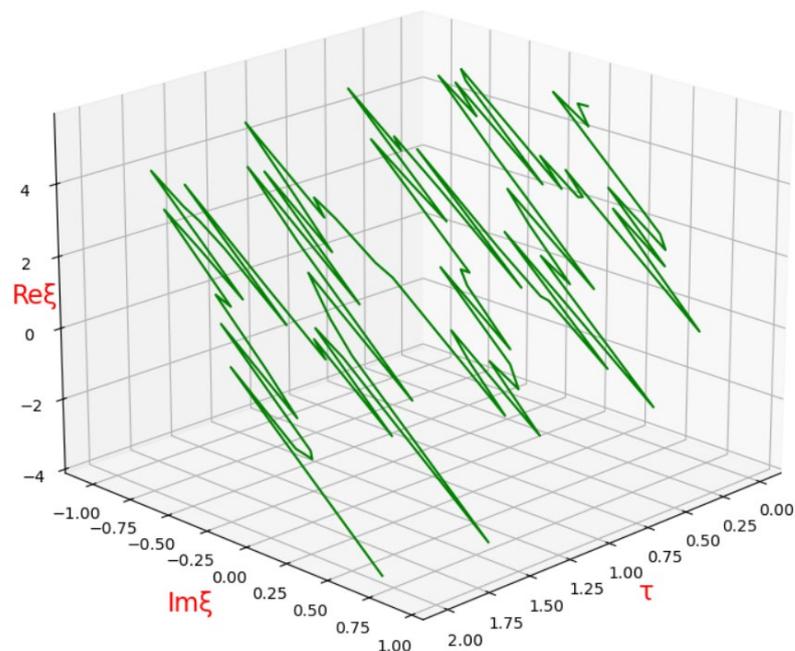


Рис. 4. – График зависимости экстраполятора от времени упреждения  $\tau$

Как видно из этого графика, прогноз исследуемого фрактального L – марковского процесса визуально напоминает фрактальный случайный процесс.

Из совместных графиков действительных и мнимых частей оптимального экстраполятора просматривается явная обратная корреляционная зависимость: когда  $\text{Re}\tilde{\xi}$  возрастает,  $\text{Im}\tilde{\xi}$  убывает практически с такой же скоростью и наоборот. Поэтому в работе были рассчитаны коэффициент линейной корреляции  $r_{\text{Пирс}}$  Пирсона и коэффициент ранговой корреляции Кендалла  $r_{\text{Кенд}}$  на каждом интервале (0; 1) и [1; 2):  $r_{\text{Пирс}}(0; 1) = -0,874$ ,  $r_{\text{Пирс}}[1; 2) = -0,922$ ;  $r_{\text{Кенд}}(0; 1) = -0,685$ ,  $r_{\text{Кенд}}[1; 2) = -0,78$ .

Рассчитанный коэффициент Пирсона указывает на несомненную линейную корреляцию между  $\text{Re}\tilde{\xi}$  и  $\text{Im}\tilde{\xi}$ , а коэффициент Кендалла – на высокую ранговую зависимость между ними на обоих интервалах. Согласно шкале Чеддока линейная связь между  $\text{Re}\tilde{\xi}$  и  $\text{Im}\tilde{\xi}$  очень высокая ( $r > 0,9$ ) при  $\tau \in [1; 2)$  и высокая ( $r > 0,85$ ) при  $\tau \in (0; 1)$ . Поэтому есть смысл перейти ко второй части корреляционно – регрессионного анализа – установлению формы этой связи в виде уравнения линейной регрессии:

$$\text{Re}\tilde{\xi} = a + b \cdot \text{Im}\tilde{\xi} = 0,0237 - 4,048 \cdot \text{Im}\tilde{\xi} \text{ при } \tau \in (0; 1) ;$$

$$\text{Re}\tilde{\xi} = a + b \cdot \text{Im}\tilde{\xi} = 0,0265 - 4,0043 \cdot \text{Im}\tilde{\xi} \text{ при } \tau \in [1; 2) .$$

Оба коэффициента  $a$  и  $b$  регрессии в построенных выше уравнениях регрессии были проверены на значимость при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и оказались значимыми, существенными.

С целью более глубокого исследования зависимости между  $\text{Re}\tilde{\xi}$  и  $\text{Im}\tilde{\xi}$  (амплитудой и фазой в нашем случае) был рассчитан бета – коэффициент  $\beta$ , называемый также коэффициентом риска, по формуле:  $\beta = b \cdot S_{\text{Im}\tilde{\xi}} / S_{\text{Re}\tilde{\xi}}$ , где

$S_{\text{Im}\tilde{\xi}}$  и  $S_{\text{Re}\tilde{\xi}}$  – стандартные отклонения мнимых и действительных частей экстраполятора  $\tilde{\xi}$ . Расчеты показали:  $\beta((0; 1)) = -0,874$ ;  $\beta([1; 2)) = -0,922$ .

Бета – коэффициент с математической точки зрения показывает, на какую часть величины среднего квадратичного отклонения меняется среднее значение  $\text{Re}\tilde{\xi}$  с изменением  $\text{Im}\tilde{\xi}$  на одно среднеквадратическое (стандартное) отклонение на фиксированном уровне значений остальных параметров  $\text{Re}\tilde{\xi}$  [10].

Этот коэффициент называют ещё коэффициентом риска, так как он может рассматриваться как количественная мера риска. Если  $|\beta| > 1$ , то риск недостижения  $\text{Re}\tilde{\xi}$  (т.е. амплитуды) ожидаемого прогнозного значения выше риска неполучения прогнозных значений её аргументов, главным из которых является  $\text{Im}\tilde{\xi}$  (фаза). Поскольку в нашем случае  $\beta((0; 1)) = -0,874$  и  $\beta([1; 2)) = -0,922$ , то риск неполучения прогнозного значения действительной частью экстраполятора  $\text{Re}\tilde{\xi}$  не намного ниже риска достижения прогнозных значений её аргументов. Причем на интервале  $(0; 1)$  этот риск несколько ниже, чем на интервале  $[1; 2)$ , что вполне объясняется большей удаленностью интервала  $[1; 2)$  от  $L$  – границы, по значениям процесса в которой и строится экстраполяция.

Поскольку коэффициент риска  $\beta$  при любом времени упреждения  $\tau \in (0; 2)$  близок по модулю к 1, это свидетельствует о высокой надежности построенного прогноза. Этот факт вполне согласуется со сделанным при исследовании процесса на фрактальность предположением о возможной высокой надежности будущего прогноза, базирующемся на высоком значении показателя Хёрста, близком к единице и следующей отсюда высокой трендоустойчивости процесса.

**Заключение.** Основным результатом работы можно сформулировать следующим образом: оптимальный экстраполятор на срок упреждения  $\tau$  представляет собой линейную комбинацию значений исследуемого процесса в пяти точках  $L$  – границы  $L = [\pi - 2; \pi]$ :  $t_1 = \pi - 2$ ,  $t_2 = \pi + \tau - 2$ ,  $t_3 = \pi - 1$ ,  $t_4 = \pi + \tau - 1$ ,  $t_5 = \pi$  при  $0 < \tau < 1$  и в тех же точках  $t_j$ ,  $j = 1, 3, 5$ , но  $t_2 = \pi + \tau - 3$ ,  $t_4 = \pi + \tau - 2$  при  $1 \leq \tau < 2$ . Этот факт подтверждает данное авторами в работе [3] образное определение  $L$  – марковского процесса: «Будущее  $L$  – марковского процесса связано с его прошлым через их  $L$  – границу», созвучное известному высказыванию специалиста в области теории вероятностей и случайных процессов Е. Вентцель: «Будущее марковского процесса связано с его прошлым через настоящее». Кроме того, в работе получен более значимый результат – показано, что прогнозное значение исследуемого  $L$  – марковского процесса зависит не просто от значений процесса в конечном интервале, предшествующему моменту упреждения, так называемой  $L$  – границы, а от конечного числа точек (в нашем случае их пять)  $L$  – границы. Это, очевидно, является крайне важным обстоятельством для различных технических приложений при разработке аппаратуры и быстродействующих алгоритмов. Следует также отметить, что близкое по модулю к единице значение показателя риска и высокая трендоустойчивость исследуемого процесса свидетельствуют о высокой надежности полученного прогноза.

### Литература

1. Yaglom A.M. Outline of Some Topics in Linear Extrapolation of Stationary Random Processes. Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1966. pp. 259 – 278.



2. Фадеева Л.Ю. Экстраполяция видеосигнала с квазирациональной спектральной плотностью // Инженерный вестник Дона. 2025. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082.

3. Фадеева Л.Ю. Построение вероятностной модели линейного оператора фильтрации с прогнозом для L-марковского процесса // Инженерный вестник Дона. 2025. №8. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10311.

4. Товстик Т.М. Фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью. // Вестник СПбГУ. 2004. Сер. 1, вып. 1, (№1), С. 55 – 60.

5. Фадеева Л.Ю., Зиновьев К.Д. Особенности параметров спектральных плотностей L-марковских процессов и видеосигналов // Электроника, фотоника и киберфизические системы. 2024. Т.4. №4. выпуск 14. С. 1-8.

6. Григорьев С.В. Экстраполяция процессов со спектральной плотностью, знаменателем которой является квазиполином // Известия вузов. Математика. №6(181), 1977. С. 26-34.

7. Yaglom A.M. An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions; Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York. 2004. 247p.

8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. Институт компьютерных исследований, М., 2002. 656 с.

9. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН, Сер. «Прикладная и компьютерная математика», Т.3, №1, 2004. С.30-44.

10. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник / Под ред. Колемаева В.А. Серия «Высшее образование». М.: Инфра, 1997. 302с.

## References

1. Yaglom A.M. Proceeding of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press. 1966. pp. 259 – 278.
2. Fadeeva L.Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2025/10082).
3. Fadeeva L. Ju. Inzhenernyj vestnik Dona. 2025. №8. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10311](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2025/10311).
4. Tovstik T.M. Vestnik SPbGU. 2004. Ser. 1, vyp. 1. №1. pp. 55 – 60.
5. Fadeeva L.Ju., Zinov'ev K.D. Jelektronika, fotonika i kiberfizicheskie sistemyj. 2024. T.4. №4: vypusk 14. pp. 1-8.
6. Grigor'ev S.V. Izvestija vuzov. Matematika. 1977. №6 (181). pp. 26-34.
7. Yaglom A.M. Revised English edition translated and edited by Richard A. Silverman. Mineola, New York, 2004. 247p.
8. Mandel'brot B. Fraktal'naja geometrija prirody [Fractal geometry of nature] Per. s angl. Institut komp'juternyh issledovanij, Moskva, 2002. 656 p.
9. Dubovikov M.M., Krjanec A.V., Starchenko N.V. Vestnik RUDN, Ser. «Prikladnaja i komp'juternaja matematika», 2004. T.3, №1. pp.30-44.
10. Kolemaev V.A., Kalinina V.N. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika. [Probability theory and mathematical statistics] M.: Infra, 1997. 302p.

**Дата поступления: 25.12.2025**

**Дата публикации: 24.02.2026**