

Применение различных типов аппроксимаций при решении задачи синтеза многосвязных систем автоматического управления

Е.Ю. Ватаева

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: В работе рассматривается решение задачи синтеза многосвязной нелинейной системы при полиномиальной и кусочно – линейной аппроксимациях. В качестве математического аппарата применяется обобщенный метод Галёркина. Приводятся результаты синтеза и преимущества каждой из аппроксимаций.

Ключевые слова: многосвязные системы автоматического управления, параметрический синтез, нелинейные системы автоматического управления, обобщенный метод Галёркина, полиномиальная аппроксимация, кусочно-линейная аппроксимация, параметрический синтез, насыщение, минимизация, целевая функция, рекуррентные соотношения.

Многосвязные системы автоматического управления (МСАУ) в настоящее время являются основой функционирования большинства сложных технических объектов — от многоконтурных промышленных установок до энергосистем и робототехнических комплексов, где процессов существенно взаимодействуют друг с другом [1-3]. Использование традиционных методов синтеза, разработанных для одномерных объектов зачастую приводит к значительному ухудшению качества управления или даже потере устойчивости [4,5]. Это обуславливает актуальность разработки новых подходов к синтезу многосвязных регуляторов

Задача синтеза МСАУ рассматривается в рамках традиционного подхода обобщенного метода Галеркина [6]. Предполагается, что известны структура синтезируемой системы автоматического управления (САУ) и параметры объекта управления. Параметры регулятора (оператора управления), структура которого задана в самой общей форме, определяются с учетом достижения заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме, таких как: время переходного процесса $T_{n.p.}$, перерегулирование σ и колебательность μ [7].

Для многосвязной системы управления с несколькими выходами и в общем случае несколькими входами целевая функция формируется на основе уравнений Галеркина путем подстановки в уравнение движения нелинейной многосвязной системы управления желаемых программных движений на входах нелинейных элементов:

$$J = \sum_{j=1}^{\max\{s,r,l\}} J_j, \min_{c_k} J,$$

$$\text{где } J_j = \sum_{q=1}^{m_j} \left\{ \sum_{i=0}^{n_j} a_{ij}(c_k) A_{qij} + \sum_{i=0}^{u_j} b_{ij}(c_k) B_{qij} + \sum_{i=0}^{v_j} e_{ij}(c_k) C_{qij} \right\}^2.$$

Интегралы A_{qi} , C_{qi} были рассчитаны ранее [8]. Используя кусочно-линейную аппроксимацию нелинейных характеристик, в [8] были получены рекуррентные соотношения для определения интегралов B_{qi} . Однако, как показано в [9,10], многие реальные нелинейные характеристики могут быть аппроксимированы с помощью полиномов g -ой степени для повышения точности синтезируемых параметров и самой системы.

Так как задача синтеза непрерывных и импульсных линейных и нелинейных САУ, в общем случае, является частным решением непрерывных и импульсных линейных и нелинейных МСАУ, использование рекуррентных соотношений для определения интегралов B_{qi} при полиномиальной аппроксимации характеристик нелинейных элементов можно применить и для МСАУ.

В качестве примера рассмотрим непрерывную импульсную многосвязную систему управления с двумя входами и двумя выходами, представленную на рис.1. В качестве входных сигналов в системе используются единичные ступенчатые функции. Для улучшения качества переходных процессов на входе нелинейности y_1 и выходе системы y_2 требуется синтезировать регуляторы, заданные в виде двух интегрирующих

звеньев с постоянными времени T_1 и T_2 и одного пропорционального звена с коэффициентом передачи k_1 .

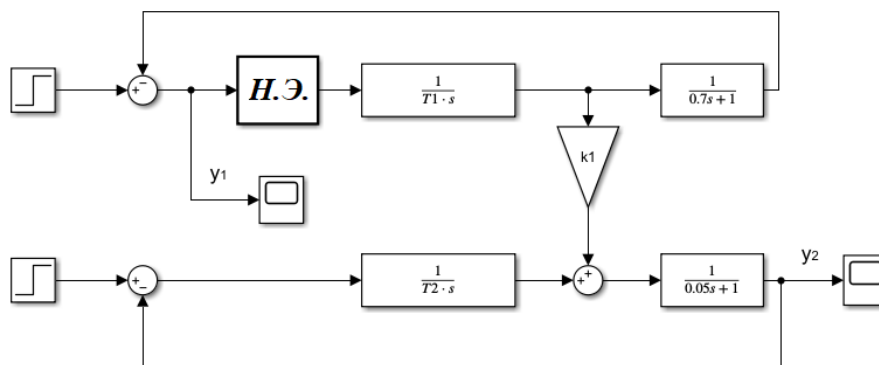


Рис.1. - Структурная схема непрерывной многосвязной САУ

В системе управления имеется нелинейный элемент типа «Насыщение» (Н.Э.), статическая характеристика которого представлена на рис.2.

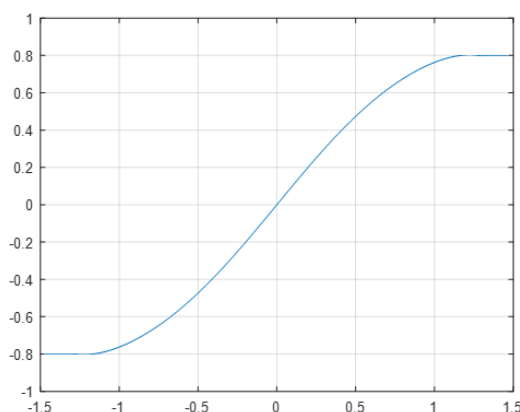


Рис.2. - Структурная схема непрерывной многосвязной САУ

Аппроксимируем статическую характеристику нелинейности типа «Насыщение» с помощью полинома седьмой степени (1), а также с помощью кусочно-линейной функции (2), для последующего сравнения аппроксимаций в задаче синтеза параметров системы управления обобщенным методом Галеркина (рис.3).

Таким образом, задача параметрического синтеза рассматриваемой системы автоматического управления заключается в нахождении значений

варьируемых параметров, которые обеспечивают необходимые показатели качества работы системы управления по двум исследуемым координатам при одновременном воздействии двух внешних скачкообразных входов.

$$F(x_0(t)) = 1.025785x_0(t) - 0.338335x_0(t)^3 + 0.103962x_0(t)^5 - 0.028561x_0(t)^7. \quad (1)$$

$$F(x_0(t)) = \begin{cases} -0.8, & x_0(t) \leq -0.8, \\ x_0(t), & |x_0(t)| < 0.8, \\ 0.8, & x_0(t) \geq 0.8. \end{cases} \quad (2)$$

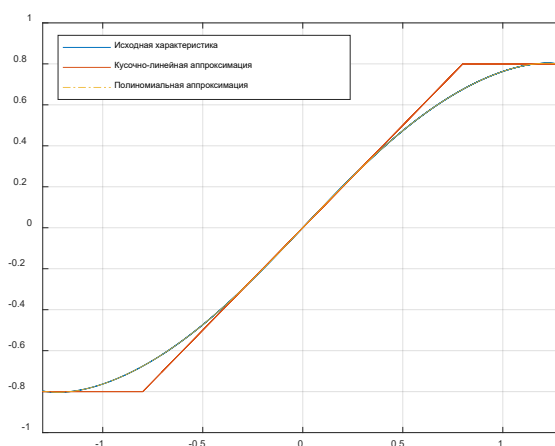


Рис.3. - Полиномиальная и кусочно-линейная аппроксимации нелинейной характеристики

Зададимся желаемым программным движением относительно входа нелинейности. Требуется, чтобы время переходного процесса $T_{н.л.}$ не превышало 3.5с. при 5% коридоре установившегося значения, а величина перерегулирования σ составляла не более 5%. вид желаемого программного движения (рис.4):

$$x_1^0(t) = (1.544 e^{(-0.73t)} \cos(0.62t - 0.87))1(t). \quad (3)$$

Зададимся желаемым программным движением относительно выхода

системы. Требуется, чтобы время переходного процесса $T_{n.n.}$ не превышало 3с. при 5% коридоре установившегося значения, величина перерегулирования σ составляла не более 5%, а вид процесса был близок к экспоненциальному.

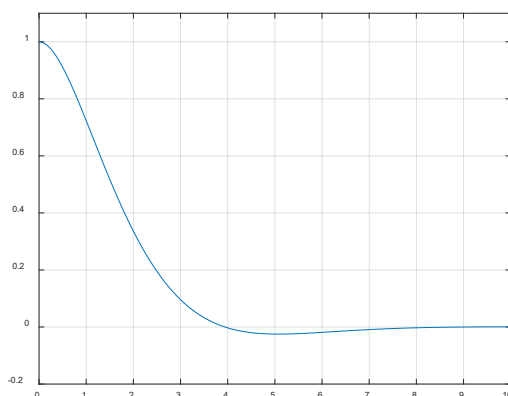


Рис. 4. – Вид желаемого программного движения (3)

Зададимся желаемым программным движением относительно выхода системы. Требуется, чтобы время переходного процесса $T_{n.n.}$ не превышало 3с. при 5% коридоре установившегося значения, величина перерегулирования σ составляла не более 5%, а вид процесса был близок к экспоненциальному. Вид желаемого программного движения (рис.5.):

$$x_2^0(t) = (1 - e^{(-0.73t)} \cos(0.55t))1(t). \quad (4)$$

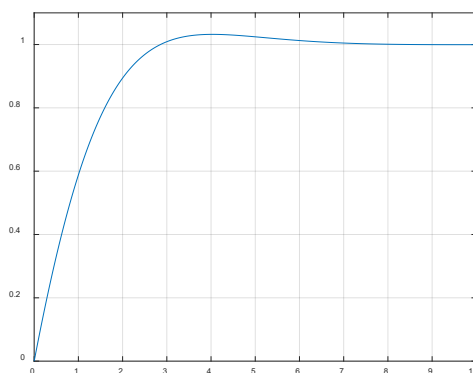


Рис. 5. – Вид желаемого программного движения (4)

Динамика системы будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^0(t)(0.7T_1s^2 + T_1s) + F[x_1^0(t)] = f_1(t)(0.7T_1s^2 + T_1s); \\ \dot{x}_2^0(t)(T_2T_10.05s^2 + T_2T_1s + T_1) - F[x_1^0(t)]k_1T_2 = f_2(t)T_1. \end{cases}$$

Сформируем невязку:

$$\begin{cases} \psi_1(c_k, t) = x_1^0(t)(0.7T_1s^2 + T_1s) + F[x_1^0(t)] - f_1(t)(0.7T_1s^2 + T_1s); \\ \psi_2(c_k, t) = x_2^0(t)(T_2T_10.05s^2 + T_2T_1s + T_1) - F[x_1^0(t)]k_1T_2 - f_2(t)T_1. \end{cases}$$

Значения искоемых параметров определяются из ортогональности невязки координатным функциям [8].

С учетом интегралов Галеркина A_{qi} , C_{qi} и B_{qi} , система примет вид:

$$\begin{cases} A_{1q2}0.7T_1 + A_{1q2}T_1 + B_{q0} = C_{1q2}0.7T_1 + C_{1q1}T_1; \\ A_{2q2}T_2T_10.05 + A_{2q1}T_2T_1s + A_{2q0}T_1 - B_{q0}k_1T_2 = C_{2q0}T_1. \end{cases}$$

$q = 1, 2, \dots, m.$

Таким образом, целевая функция для поисков параметров T_1 , T_2 и k_1 примет вид:

$$\begin{aligned} J = \sum_{q=1}^{m=3} \{ & A_{1q2}0.7T_1 + A_{1q2}T_1 + B_{q0} - C_{1q2}0.7T_1 - C_{1q1}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{2q2}T_2T_10.05 + A_{2q1}T_2T_1s + A_{2q0}T_1 - B_{q0}k_1T_2 - C_{2q0}T_1 \}^2 = \\ & = \{ A_{112}0.7T_1 + A_{112}T_1 + B_{10} - C_{112}0.7T_1 - C_{111}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{212}T_2T_10.05 + A_{211}T_2T_1s + A_{210}T_1 - B_{10}k_1T_2 - C_{210}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{122}0.7T_1 + A_{122}T_1 + B_{20} - C_{122}0.7T_1 - C_{121}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{222}T_2T_10.05 + A_{221}T_2T_1s + A_{220}T_1 - B_{20}k_1T_2 - C_{220}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{132}0.7T_1 + A_{132}T_1 + B_{30} - C_{132}0.7T_1 - C_{131}T_1 \}^2 + \\ & + \{ A_{232}T_2T_10.05 + A_{231}T_2T_1s + A_{230}T_1 - B_{30}k_1T_2 - C_{230}T_1 \}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Минимизируем целевую функцию (5) при следующих ограничениях на параметры:

$$0 < T_1 \leq 10;$$

$$0 < T_2 \leq 10;$$

$$0 < k_1 \leq 10.$$

С учетом интегралов B_{qi} , полученных при полиномиальной аппроксимации, минимизируя целевую функцию (5), получаем следующие параметры системы:

$$T_1 = 1.3026;$$

$$T_2 = 1.3416;$$

$$k_1 = 0.238.$$

С учетом интегралов B_{qi} , полученных при кусочно-линейной аппроксимации, минимизируя целевую функцию (5), получаем следующие параметры системы:

$$T_1 = 1.4135;$$

$$T_2 = 1.3274;$$

$$k_1 = 0.2289.$$

На рис.6. представлены переходные процессы в системах на входах нелинейностей, аппроксимированных разными методами, с учетом полученных коэффициентов. Оба переходных процесса удовлетворяют заданным показателям качества, причем переходный процесс в системе с полиномиальной аппроксимацией нелинейного элемента протекает на $\approx 0.03c$. быстрее, в сравнении с переходным процессом в системе с кусочно-линейной аппроксимацией.

На рис.7 представлены переходные процессы на выходах систем, аппроксимированных разными методами, с учетом полученных коэффициентов. Переходные процессы также удовлетворяют заданным показателям качества, причем переходный процесс в системе с полиномиальной аппроксимацией нелинейного элемента протекает на $\approx 0.05c$.

быстрее, в сравнении с переходным процессом в системе с кусочно-линейной аппроксимацией.

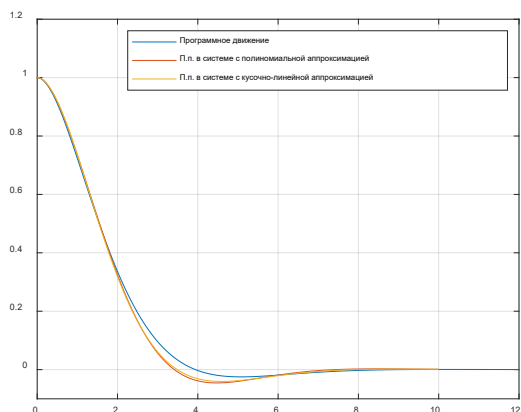


Рис. 6. – Сравнение переходных процессов в системах на входах нелинейностей, аппроксимированных различными способами

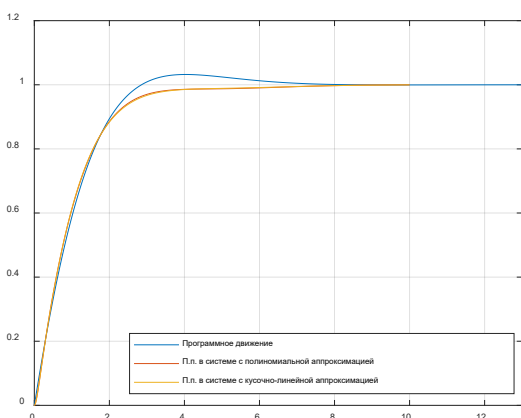


Рис. 7. – Сравнение переходных процессов на выходах систем с различными аппроксимациями нелинейного элемента

Таким образом, показано, что применение полиномиальной аппроксимации нелинейных характеристик позволяет повысить точность параметрического синтеза нелинейных многосвязных систем автоматического управления по сравнению с традиционной кусочно-линейной аппроксимацией. Сравнение результатов продемонстрировало, что использование полиномиальной аппроксимации может быть рекомендовано

для повышения точности и быстродействия нелинейных многосвязных систем управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-20230003, "Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем 1 космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга".

Литература

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. 750 p.
2. Wen-Chao HUANG, Hong-Fei SUN, Jian-Ping ZENG, Robust Control Synthesis of Polynomial Nonlinear Systems Using Sum of Squares Technique, Acta Automatica Sinica, Volume 39, Issue 6, 2013, Pages 799-805, ISSN 1874-1029, doi.org/10.1016/S1874-1029(13)60055-5
3. Целигоров Н.А., Целигорова Е.Н., Мафура Г.Ф. Математические модели неопределенностей систем и методы, используемые для их исследования // Инженерный вестник Дона. 2012. №4. (ч.2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340 (доступ свободный).
4. Peixuan Ding, Kaiyu Chen, Linlin Ou, Xinyi Yu, Weidong Zhang, Controller synthesis for a class of nonlinear systems with time delay based on stability region of PID controllers, ISA Transactions, Volume 162, 2025, Pages 85-94, ISSN 0019-0578, doi.org/10.1016/j.isatra.2025.04.015.
5. Talha Mushtaq, Peter Seiler, Maziar S. Hemati, On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities, Automatica, Volume 159, 2024, 111380, ISSN 0005-1098, doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111380.

6. Никитин А.В., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография. – СПб: СПбГУАП., 2003. – 358 с.

7. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных уравнений нелинейными Лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251 (доступ свободный)

8. Цветков, С. А., Шишлаков, В.Ф., Шишлаков, Д.В. Синтез многосвязных систем автоматического управления во временной области // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2007. – Т. 50, № 12. – С. 13-17.

9. Ватаева, Е. Ю. Параметрический синтез операторов управления САУ при полиномиальной аппроксимации характеристик нелинейных элементов / Е. Ю. Ватаева // Труды МАИ. – 2023. – № 128. – DOI 10.34759/trd-2023-128-16.

10. Шишлаков, В.Ф., Ватаева, Е. Ю., Гречкин, Н. Л., Шишлаков, Д. В. Применение полиномиальной аппроксимации в решении задач синтеза нелинейных САУ // Датчики и системы. – 2023. – № 4-2(270). – С. 10-12. – DOI 10.25728/datsys.2023.4.2.2.

References

1. Khalil H.K. Nonlinear Systems. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. 750 p.

2. Wen-Chao HUANG, Hong-Fei SUN, Jian-Ping ZENG, Acta Automatica Sinica, Volume 39, Issue 6, 2013, Pages 799-805, ISSN 1874-1029, [doi.org/10.1016/S1874-1029\(13\)60055-5](https://doi.org/10.1016/S1874-1029(13)60055-5)

3. Tseligorov N.A., Tseligorova E.N., Mafura G.F. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4. (ch.2). URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1340.



4. Peixuan Ding, Kaiyu Chen, Linlin Ou, Xinyi Yu, Weidong Zhang, ISA Transactions, Volume 162, 2025, Pages 85-94, ISSN 0019-0578, doi.org/10.1016/j.isatra.2025.04.015.
5. Talha Mushtaq, Peter Seiler, Maziar S. Hemati, Automatica, Volume 159, 2024, 111380, ISSN 0005-1098, doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111380.
6. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. Parametricheskij sintez nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya: monografiya. [Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems: monograph] SPb: SPbGUAP, 2003. 358 p.
7. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Lazarenko S.V., Tsennykh B.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2251
8. Tsvetkov S. A., Shishlakov F.V., Shishlakov D.V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie. 2007. T. 50, № 12. pp. 13-17.
9. Vataeva E. Yu. Trudy MAI. 2023. № 128. URL: trudymai.ru/published.php?ID=171404
10. Shishlakov V. F., Vataeva E. Yu., Grechkin N. L., Shishlakov D. V. Datchiki i sistemy. 2023. № 4-2(270). pp. 10-12.

Авторы согласны на обработку и хранение персональных данных.

Дата поступления: 17.11.2025

Дата публикации: 26.12.2025